1. *Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.*
(*Patrik Bak*)

Riešenie. Podľa zadania je číslo $\overline{ab}$ o jednotku väčšie ako číslo $\overline{cd}$, čiže

$$\overline{ab} = \overline{cd} + 1.$$

Podľa hodnoty cifry d tak máme dve možnosti.

Ak $d < 9$, pričítaním jednotky „neprejdeme cez desiatku", takže pre jednotlivé cifry platí $a = c$ a zároveň $b = d + 1$. V tom prípade je ciferný súčet hľadaného čísla rovný

$$a + b + c + d = c + (d + 1) + c + d = 2(c + d) + 1,$$

čo je nepárne číslo, a teda sa nemôže rovnať číslu 12.

Pre $d = 9$ naopak pričítaním jednotky „prejdeme cez desiatku", takže musí byť $b = 0$ a $a = c + 1 \leqq 9$. Pre ciferný súčet hľadaného čísla potom platí $a + b + c + d = (c + 1) + 0 + c + 9 = 2c + 10$, čo je rovné 12 práve vtedy, keď $c = 1$. Dostávame tak jediné riešenie $c = 1$, ku ktorému dopočítame $a = c + 1 = 2$.

Jediné vyhovujúce štvorciferné číslo je číslo 2 019.

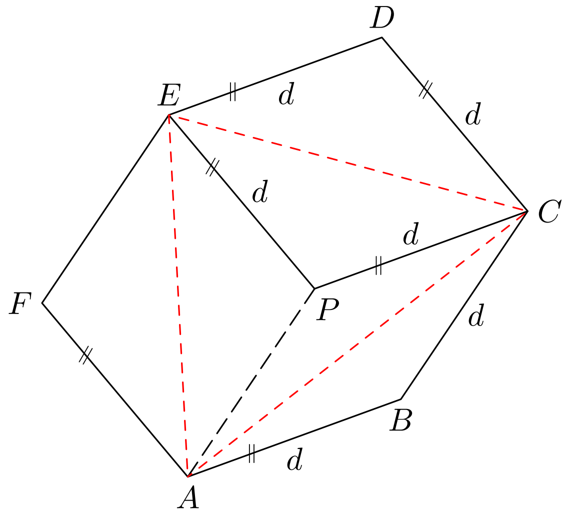
Návodné a doplňajúce úlohy:

- N1. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 13 také, že $\overline{ab} = \overline{cd}$. [Také číslo $\overline{abab}$ neexistuje, lebo jeho ciferný súčet je párny.]
- N2. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$. [Také číslo $\overline{ab(a-1)b}$ neexistuje, lebo jeho ciferný súčet je nepárny.]
- N3. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 8 také, že $\overline{ab} = \overline{cd}$. [1313, 2222, 3131, 4040]
- D1. Nájdite najväčšie a najmenšie štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 13 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$. [7060, 1606 – ak pripustíme zápis $\overline{06}$, inak 2515.]
- D2. Nájdite všetky osemciferné čísla $\overline{abcdefgh}$ s ciferným súčtom 16 také, že $\overline{efgh} - \overline{abcd} = 1$. [Vysvetlite najskôr, prečo pri sčítaní $\overline{abcd} + 1$ musí nastať *práve jeden* prenos jednotky do vyššieho rádu, takže každé hľadané číslo je tvaru $\overline{abc9\,ab(c+1)0}$. Vyhovujú čísla 1029 1030, 1119 1120, 1209 1210, **2019 2020**, 2109 2110, 3009 3010.]

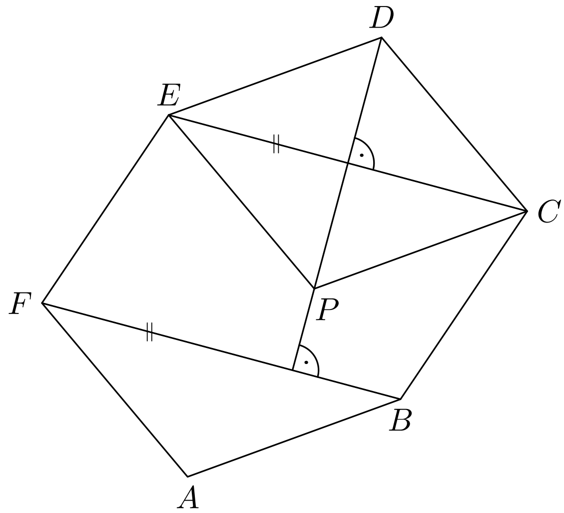
2. *Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého všetky strany sú zhodné a protiľahlé strany rovnobežné. Bod P je taký, že štvoruholník $CDEP$ je rovnobežník. Dokážte, že bod P je stredom kružnice opísanej trojuholníku ACE a súčasne aj priesečníkom výšok trojuholníka BDF.*
(*Jakub Löwit*)

Riešenie. Označme d dĺžku strán daného šesťuholníka. Rovnobežník $CDEP$ je zrejme kosoštvorec, pretože obe úsečky CD a DE majú rovnakú dĺžku d. Rovnakú dĺžku d majú teda aj úsečky PC a PE. Zo zadania vieme, že úsečky AB a DE sú rovnobežné a zhodné, preto aj úsečky PC a AB sú rovnobežné a zhodné, z čoho vyplýva, že aj štvoruholník $ABCP$ je kosoštvorec so stranou dĺžky d (obr. 1). Vďaka tomu dostávame

$|PA| = |PC| = |PE| = d$, a bod P je tak naozaj stredom kružnice opísanej trojuholníku ACE.



Obr. 1



Obr. 2

Štvoruholník $BCEF$ je rovnobežník, pretože jeho protiľahlé strany BC a EF sú rovnobežné a zhodné. Potom aj jeho protiľahlé strany CE a BF sú rovnobežné. Aby sme ukázali, že priamka DP je kolmá na priamku BF (obr. 2), stačí si uvedomiť, že uhlopriečky kosoštvorca $CDEP$ sú navzájom kolmé. Naozaj, z kolmosti $CE \perp DP$ a rovnobežnosti $CE \parallel BF$ vyplýva $DP \perp BF$. To vlastne znamená, že DP je priamkou výšky z vrcholu D trojuholníka BDF. Podobne – využitím navzájom kolmých uhlopriečok kosoštvorca $ABCP$ a rovnobežných protiľahlých strán AC a DF rovnobežníka $ACDF$ – dokážeme, že na priamke BP leží výška trojuholníka BDF z vrcholu B. Bod P je teda priesečníkom výšok trojuholníka BDF, ako sme mali tiež dokázať.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a že sa navzájom rozpoľujú. [Uhlopriečky sú zároveň výškami rovnoramenných trojuholníkov s vrcholmi vo vrcholoch kosoštvorca.]

N2. Dokážte, že ak sú dve zhodné úsečky neležiace v jednej priamke rovnobežné, tvoria ich krajné body rovnobežník. [Dokreslite ďalšie dve úsečky, ktoré s danými úsečkami vytvoria konvexný štvoruholník. Jeho uhlopriečka rozdeľuje štvoruholník na dva trojuholníky, ktoré sú zhodné podľa vety *sus*.]

D1. Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má všetky strany zhodné a protiľahlé dvojice strán rovnobežné. Dokážte, že stred úsečky CF je totožný s priesečníkom priamok AD a BE. [$ACDF$ aj $ABDE$ sú rovnobežníky.]

D2. Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má všetky strany zhodné a protiľahlé dvojice strán rovnobežné. Označme X a Y priesečníky výšok trojuholníkov ACE a BDF. Dokážte, že v prípade $X \neq Y$ stred úsečky XY rozpoľuje úsečku AD. [Z rovnobežníkov $ABDE$ a $ACDF$ vidíme, že úsečky AD, BE a CF prechádzajú jedným bodom. Ten určuje stredovú súmernosť, v ktorej si zodpovedajú ako body A, D, tak body C, F i body E, B, a teda aj trojuholníky ACE a DFB. Preto sú podľa stredu úsečky AD súmerne združené nielen priesečníky výšok spomenutých trojuholníkov (ako sme mali ukázať), ale aj ich ťažiská, stredy im opísaných aj stredy im vpísaných kružníc. Rovnaké závery platia aj pre tri ďalšie dvojice súmerne združených trojuholníkov (ABC, DEF), (ABF, DEC) a (AEF, DBC).]

3. *Určte všetky dvojice prirodzených čísel a a b, pre ktoré platí*

$$2[a, b] + 3(a, b) = ab,$$

pričom $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a, b) najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Využitím známej rovnosti $m \cdot n = [m, n] \cdot (m, n)$, ktorá platí pre ľubovoľné prirodzené čísla m a n, môžeme zadanú rovnicu upraviť na tvar

$$2[a, b] + 3(a, b) = [a, b] \cdot (a, b).$$

Pre zjednodušenie zápisu označme $u = [a, b]$ a $v = (a, b)$, pričom u, v sú prirodzené čísla, pre ktoré zrejme platí $u \geqq v$, lebo najmenší spoločný násobok čísel a a b určite nie je menší ako ktorýkoľvek ich spoločný deliteľ. Máme tak riešiť rovnicu $2u + 3v = uv$, ktorú kvôli tomu upravíme na tvar

$$uv - 2u - 3v + 6 = 6, \quad \text{čiže} \quad (u - 3)(v - 2) = 6, \tag{1}$$

pričom u, v sú prirodzené čísla spĺňajúce podmienku $u \geqq v$ a samozrejme aj podmienku $v \mid u$ (spoločný deliteľ delí spoločný násobok).

Pre $v = 1$ nevyjde u prirodzené, musí teda byť $v - 2 \geqq 0$, a teda aj $u - 3 \geqq 0$. Číslo 6 možno napísať ako súčin dvoch nezáporných čísel štyrmi spôsobmi:

- ▷ $6 = 6 \cdot 1$, takže $u = 9$, $v = 3$. Keďže $(a, b) = 3$, môžeme písať $a = 3\alpha$, $b = 3\beta$, pričom $(\alpha, \beta) = 1$, teda $9 = [a, b] = 3[\alpha, \beta]$, čo dáva $\{\alpha, \beta\} = \{1, 3\}$, čiže $\{a, b\} = \{3, 9\}$.
- ▷ $6 = 3 \cdot 2$, takže $u = 6$, $v = 4$, potom ale nie je splnená podmienka $v \mid u$.
- ▷ $6 = 2 \cdot 3$, takže $u = 5$, $v = 5$ a $ab = [a, b](a, b) = uv = 5 \cdot 5$. Ak sa najväčší spoločný deliteľ čísel a a b rovná ich najmenšiemu spoločnému násobku, je $a = b = u = v$, teda $a = b = 5$.
- ▷ $6 = 1 \cdot 6$, takže $u = 4$, $v = 8$, potom ale nie je splnená podmienka $u \geqq v$.

Riešeniami sú usporiadané dvojice $(a, b) \in \{(5, 5), (3, 9), (9, 3)\}$.

Iné riešenie. Označme $(a, b) = D$. Hľadané čísla potom môžeme napísať v tvare $a = \alpha D$, $b = \beta D$, pričom α a β sú navzájom nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže najmenší spoločný násobok vyjde ako $[a, b] = \alpha\beta D$. Dosadením do zadanej rovnice a jej úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta D + 3D &= \alpha D \beta D, \\ 2\alpha\beta + 3 &= \alpha\beta D, \\ 1 \cdot 1 \cdot 3 &= \alpha\beta(D - 2). \end{aligned}$$

Keďže α aj β sú prirodzené čísla a ľavá strana je kladná, musí byť aj $D - 2 \geqq 1$. Z troch možných poradí rozkladu čísla 3 na súčin troch činiteľov ($3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 3$) dostávame tri riešenia $(\alpha, \beta, D) \in \{(3, 1, 3), (1, 3, 3), (1, 1, 5)\}$, ku ktorým ľahko dopočítame usporiadané dvojice $(a, b) = (\alpha D, \beta D) \in \{(9, 3), (3, 9), (5, 5)\}$.

Iné riešenie. Pravá strana zadanej rovnice je deliteľná číslom a, a preto je ním deliteľná aj ľavá strana. Aj najmenší spoločný násobok čísel a a b, ktorý sa vyskytuje na ľavej strane rovnice, je číslom a deliteľný, a preto ním musí byť deliteľné aj číslo $3(a,b)$. Rovnaká úvaha vedie k záveru, že číslo $3(a,b)$ je deliteľné aj číslom b, takže je spolu deliteľné číslom $[a,b]$, ktoré je však samo vždy násobkom čísla (a,b). Vzhľadom na to, že číslo 3 je prvočíslo, je číslo $[a,b]$ rovné buď samotnému číslu (a,b), alebo jeho trojnásobku.

Prvý prípad $[a,b]=(a,b)$ nastane práve vtedy, keď $a=b$ – z rovnice $2a+3a=a^2$ potom vychádza $a=5$. Druhý prípad $[a,b]=3(a,b)$ vzhľadom na to, že 3 je prvočíslo, nastane práve vtedy, keď $\{a,b\}=\{d,3d\}$ pre vhodné prirodzené d – z rovnice $2\cdot 3d+{}$ ${}+3d=3d^2$ potom vychádza $d=3$. Je teda buď $a=b=5$, alebo $\{a,b\}=\{3,9\}$.

Úlohe tak vyhovujú práve tri usporiadané dvojice $(3,9)$, $(9,3)$, $(5,5)$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice a, b celých kladných čísel, pre ktoré platí $a\cdot[a,b]=4\cdot(a,b)$, pričom symbol $[a,b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a,b) najväčší spoločný deliteľ celých kladných čísel a, b. [62-C-S-2]

N2. Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a,b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a,b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť $a\cdot(a,b)+b\cdot[a,b]\geqq 2ab$. Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. [60-C-I-5]

D1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín $\{a\cdot[a,b], b\cdot(a,b)\}=\{45,180\}$, pričom (x,y) označuje najväčší spoločný deliteľ a $[x,y]$ najmenší spoločný násobok čísel x a y. [61-C-S-1]

D2. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť $\big\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\big\}=\{2,3,5,60,90,180\}$, pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y. [61-C-I-3]

---

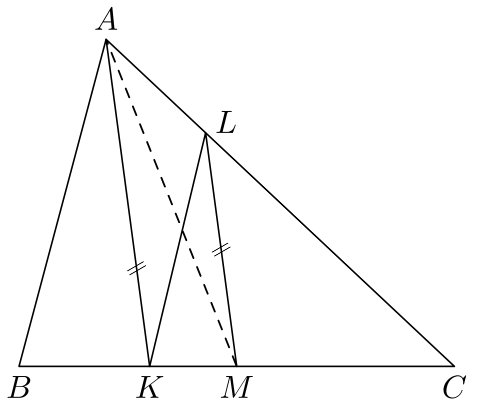
4. *Vnútri strany BC trojuholníka ABC je daný bod K. Označme M stred strany BC a predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AK vedená bodom M pretína stranu AC vo vnútornom bode L. Dokážte, že priamka KL delí trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom.* (*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Obsah trojuholníka XYZ budeme označovať $S(XYZ)$.

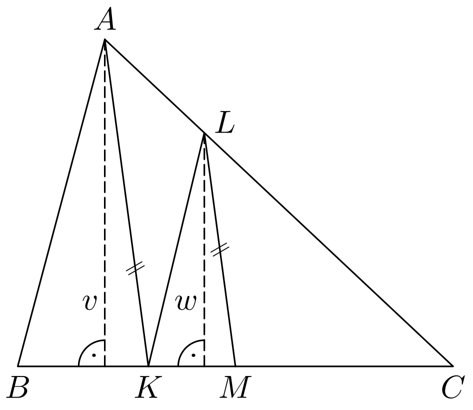
Keďže podľa zadania sú body A a L rôzne, sú rôzne aj body K a M. Platí $S(KML)=S(AML)$, pretože trojuholníky KML a AML majú zhodnú základňu ML aj výšku na ňu, lebo priamky AK a LM sú podľa predpokladu rovnobežné (obr. 3).

Vyjdeme z toho, že ťažnica AM delí trojuholník ABC na dva trojuholníky BMA a CMA s rovnakým obsahom, pretože oba trojuholníky majú rovnakú výšku na zhodné strany BM a CM, a využijeme aj vyššie dokázanú rovnosť $S(KML)=S(AML)$. To už stačí na to, aby sme dokázali, že $S(KCL)=\frac{1}{2}S(ABC)$, čo dáva požadovanú rovnosť obsahov štvoruholníka $BKLA$ a trojuholníka KCL, ako ukazuje výpočet

$$\begin{aligned}S(KCL)&=S(KML)+S(LMC)=\\&=S(AML)+S(LMC)=\\&=S(ACM)=\frac{1}{2}S(ABC).\end{aligned}$$



Obr. 3



Obr. 4

Iné riešenie. Uvažujme číslo k určené rovnosťou $|CK| = k|BC|$ a označme v vzdialenosť bodu A od priamky BC (obr. 4). Z podobnosti trojuholníkov AKC a LMC vyplýva, že pre vzdialenosť w bodu L od priamky BC platí

$$w = \frac{|CM|}{|CK|} \cdot v = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{k|BC|} \cdot v = \frac{v}{2k}.$$

Obsah trojuholníka KCL je teda rovný

$$S(KCL) = \frac{1}{2}|CK|w = \frac{1}{2}k|BC| \cdot \frac{v}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|BC|v = \frac{1}{2}S(ABC),$$

ako sme mali dokázať.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Presvedčte sa, že stredné priečky (t. j. spojnice stredov strán) delia ľubovoľný trojuholník na štyri zhodné trojuholníky. [Stredné priečky sú rovnobežné s protiľahlými stranami, a preto sú všetky štyri trojuholníky podobné. Zhodnosť vyplýva z toho, že stredné priečky rozpoľujú jednotlivé strany.]

N2. Uvedomte si, že dva trojuholníky majú zhodné obsahy, ak sa zhodujú ako v dvoch stranách, tak aj v k nim prislúchajúcich výškach. Použitím tohto pravidla vysvetlite, prečo jedna ťažnica ľubovoľného trojuholníka rozpoľuje jeho obsah, zatiaľ čo všetky tri ťažnice delia jeho obsah na šesť rovnako veľkých dielov. [V trojuholníku ABC s ťažnicami AA_1, BB_1, CC_1 a ťažiskom T pre prvé tvrdenie o ťažnici AA_1 použite pravidlo na dvojicu trojuholníkov (ABA_1, ACA_1), pre druhé tvrdenie o šiestich dieloch navyše aj na dvojice (ATC_1, BTC_1), (BTA_1, CTA_1) a (CTB_1, ATB_1).]

D1. Uvedomte si, že dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane, majú svoje obsahy v pomere prislúchajúcich výšok na túto stranu. Použitím tohto pravidla vysvetlite, prečo tri úsečky, ktoré spájajú vrcholy trojuholníka s jeho ťažiskom, delia jeho obsah na tri rovnako veľké diely, bez toho, že pritom použijete výsledok úlohy N2. [Ťažisko má od každej strany trojuholníka trikrát menšiu vzdialenosť ako protiľahlý vrchol.]

D2. Nad preponou AB pravouhlého trojuholníka ABC zostrojme štvorec $ABDE$. Zistite (v závislosti od dĺžok strán trojuholníka), v akom pomere rozdeľuje priamka výšky z vrcholu C na preponu AB obsah štvorca $ABDE$. [Podľa Euklidovej vety o odvesne to je $a^2 : b^2$, pretože priamka výšky z vrcholu C delí štvorec na dva obdĺžniky so spoločnou stranou.]

D3. Uvedomte si, že dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej výške, majú svoje obsahy v pomere dĺžok strán, ktorým táto výška prislúcha. Použitím tohto pravidla potom dokážte tvrdenie: Ľubovoľný konvexný štvoruholník je svojimi uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky s obsahmi, ktoré možno označiť S_1, S_2, S_3 a S_4 tak, že platí

$S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ a že rovnosť $S_2 = S_4$ nastane práve vtedy, keď sú rovnobežné tie strany štvoruholníka, ktoré prislúchajú trojuholníkom s obsahmi S_1 a S_3. [Ak označíme dotyčné obsahy S_i štyroch trojuholníkov v kruhovom poradí okolo ich spoločného vrcholu, oba pomery $S_1 : S_2$ a $S_4 : S_3$ budú zhodné s pomerom, v akom jedna z uhlopriečok štvoruholníka delí jeho druhú uhlopriečku. Rovnosť $S_2 = S_4$ je ekvivalentná s rovnosťou $S_1 + S_2 = S_1 + S_4$, ktorá je rovnosťou obsahov dvoch trojuholníkov so spoločnou stranou.]

---

5. *Tabuľku 3×3 máme vyplniť deviatimi danými číslami tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch. Rozhodnite, či je možné takú úlohu splniť s číslami*

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ak áno, zistite, koľkými spôsobmi možno úlohu splniť tak, aby najväčšie číslo bolo uprostred tabuľky. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Súčet čísel v každom riadku (aj v každom stĺpci) je párny, rovná sa totiž dvojnásobku najväčšieho z troch zapísaných čísel. Preto musí byť aj súčet všetkých čísel zapísaných v tabuľke párny. Keďže v prípade a) je súčet čísel rovný 45, úlohu nemožno splniť.

Keďže súčet čísel v prípade b) je párny $(10 \cdot 11/2 - 1 = 54)$, pokúsime sa tabuľku vyplniť požadovaným spôsobom. Medzi danými deviatimi číslami je päť čísel párnych (budeme ich označovať symbolom P) a štyri nepárne čísla (tie budeme označovať symbolom N). Symbolicky teda musí v každom riadku aj stĺpci platiť jedna z rovností $P = N + N$, $P = P + P$ alebo $N = P + N$. Ak sa pozrieme na počty použitých párnych a nepárnych čísel v týchto rovnostiach a zohľadníme aj to, že musíme použiť viac čísel párnych ako nepárnych, usúdime, že aspoň jeden riadok a jeden stĺpec musí byť typu $P = P + P$.

Riadky našej tabuľky môžeme prehadzovať medzi sebou, bez toho, aby sme porušili podmienku zo zadania. Podobne to platí pre stĺpce. Môžeme preto predpokladať, že ako prvý riadok, tak aj prvý stĺpec obsahujú iba párne čísla (sú teda typu $P = P + P$). Pozrime sa na ich spoločné políčko (ľavý horný roh tabuľky), v ktorom musí byť napísané jedno z čísel 2, 4, 6, 8 alebo 10.

Vypíšeme pre každého z piatich kandidátov všetky príslušné rovnosti pre splnenie podmienky úlohy pre prvý stĺpec a prvý riadok:

$$2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8, \quad 4 = 6 - 2 = 10 - 6, \quad 6 = 2 + 4 = 8 - 2 = 10 - 4,$$
$$8 = 2 + 6 = 10 - 2, \quad 10 = 8 + 2 = 6 + 4.$$

Vidíme, že iba štvorku a osmičku dvoma „disjunktnými“ spôsobmi zapísať nemožno, preto v spoločnom políčku musí byť napísané jedno z čísel 2, 6 alebo 10 a tabuľka tak musí byť (až na poradie riadkov, stĺpcov a prípadné preklopenie podľa uhlopriečky) vyplnená párnymi číslami jedným z troch spôsobov (hviezdičky tu označujú štyri nepárne čísla 3, 5, 7, 9 zapísané v niektorom poradí), ktoré budeme ďalej skúmať:

2	8	10
4	*	*
6	*	*

Typ A

6	2	8
4	*	*
10	*	*

Typ B

10	4	6
2	*	*
8	*	*

Typ C

V tabuľke typu A by sme v 2. a 3. stĺpci museli mať $8 = 3 + 5$ a $10 = 3 + 7$, číslo 3 však nemôže byť v oboch stĺpcoch, preto požadované vyplnenie tabuľky typu A neexistuje.

V tabuľke typu B máme v 3. riadku a 3. stĺpci opäť čísla 8 a 10 a z už uvedených rovností naopak vidíme, že tabuľku možno doplniť jediným vyhovujúcim spôsobom

6	2	8
4	9	5
10	7	3

$\rightarrow$

2	6	8
7	10	3
9	4	5

Tabuľku sme rovno premenili (vzájomnou výmenou najskôr prvého stĺpca s druhým a potom druhého riadku s tretím) na jeden z možných tvarov, keď číslo 10 stojí uprostred tabuľky, ako vyžaduje zadanie úlohy.

Napokon v tabuľke typu C máme v 3. riadku jedinú možnosť vyjadrenia $8 = 5 + 3$, zatiaľ čo v 3. stĺpci je to jedine $6 = 9 - 3$. Tým je určená pozícia nielen čísel 3, 5 a 9, ale aj zvyšného čísla 7. Výsledná tabuľka zjavne úlohe nevyhovuje.

Ostáva zistiť počet rôznych tabuliek, ktoré možno z vyplnenej tabuľky typu B vytvoriť tak, aby číslo 10 bolo uprostred. V prostrednom riadku či stĺpci musia spolu s 10 byť čísla 6 a 4, resp. 7 a 3, pre ich umiestnenie tak máme celkom $4 \cdot 2 = 8$ možností (šestku dáme na jedno zo štyroch políčok susediacich s prostrednou desiatkou, štvorka potom bude na políčku protiľahlom, sedmičku dáme na jedno z dvoch zvyšných políčok susediacich s desiatkou; čísla v rohových políčkach sú potom už určené jednoznačne).

Iné riešenie. Ešte jedným spôsobom ukážeme, že požadované vyplnenie tabuľky číslami 2 až 10 je (až na možné zmeny poradia riadkov, poradia stĺpcov a preklopenia tabuľky pozdĺž jej uhlopriečok) jediné.

Vyberieme po najväčšom čísle z každého riadku (respektíve každého stĺpca) správne vyplnenej tabuľky, dostaneme v oboch prípadoch tri čísla, ktorých súčet sa musí podľa zadania rovnať polovici súčtu všetkých deviatich zapísaných čísel, teda číslu $54 : 2 = 27$, čo je $10 + 9 + 8$. Preto tri vybrané čísla musia byť 10, 9 a 8, lebo každá iná trojica zapísaných čísel má súčet menší ako 27. Tak sme zistili, že čísla 10, 9, 8 musia byť zapísané každé v inom riadku aj v inom stĺpci. Vzhľadom na vyššie opísané zmeny tak môžeme predpokladať, že čísla 10, 9, 8 sú zapísané na jednej uhlopriečke tabuľky ako na poslednom obrázku predchádzajúceho riešenia:

$*$	$*$	8
$*$	9	$*$
10	$*$	$*$

Podmienku úlohy pre riadky a stĺpce s číslami 8 a 10 možno splniť jedine tak, ako vyjadrujú rovnosti $8 = 2 + 6 = 3 + 5$ a $10 = 3 + 7 = 4 + 6$. Z toho vyplýva, že neurčené čísla v dvoch rohových políčkach tabuľky musia byť 3 a 6 – jediné dve čísla vystupujúce v uvedených vyjadreniach oboch čísel 8 a 10. Umiestnenie čísel 3 a 6 je teda (až na možné preklopenie pozdĺž uhlopriečky s číslami 10, 9, 8) dané:

6	$*$	8
$*$	9	$*$
10	$*$	3

Umiestnenie zvyšných čísel 2, 4, 5, 7 je jednoduché – pozri poslednú tabuľku z predchádzajúceho riešenia pred konečnou zmenou poradia riadkov a stĺpcov.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčet čísel v každom riadku bolo párne číslo? [Nie, keďže potom by musel byť aj súčet všetkých čísel párny a $1 + + 2 + \ldots + 9 = 45$.]

N2. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $2, 3, \dots, 10$ tak, aby v každom riadku bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch? [Áno, vyhovuje napríklad vyplnenie riadkov trojicami čísel $(2, 6, 8)$, $(4, 5, 9)$ a $(3, 7, 10)$ v akomkoľvek poradí.]

N3. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $4, 5, \dots, 12$ tak, aby v každom stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch? [Nie. Súčet všetkých 9 čísel je 72, takže súčet troch stĺpcových maxím by musel byť 36, čo je viac ako $10 + 11 + 12$.]

D1. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčin čísel v každom riadku bol druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla? [Nie, keďže súčin zadaných čísel nie je druhou mocninou.]

D2. Je možné vyplniť tabuľku 3×3 číslami $1, 2, \dots, 9$ tak, aby súčet čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol nejakým prvočíslom? [Áno, jedno z riešení je zľava doprava a zhora nadol s číslami postupne 1, 3, 7, 6, 9, 2, 4, 5, 8.]

---

6. *Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqq 1$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčtu $a + b + c$.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy je užitočné hľadať vzťah medzi dvoma zadanými výrazmi. Prvý z nich $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$ obsahuje druhé mocniny premenných, pričom druhý $a + b + c$ iba prvé mocniny. Jeho umocnením však dostaneme

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac). \tag{1}$$

Výrazy $a^2 + b^2 + c^2$ a $ab + bc + ac$ sú navyše vo vzájomnom vzťahu, konkrétne

$$ab + bc + ac \leqq a^2 + b^2 + c^2, \tag{2}$$

ako ľahko odvodíme zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$.

Získaná nerovnosť (2) nám spolu s danou nerovnosťou umožňuje písať

$$2(ab + bc + ac) \leqq a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac \leqq 1,$$

takže

$$ab + bc + ac \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Keď teraz šikovne dosadíme do rovnosti (1) tak, aby sme zároveň využili aj danú nerovnosť, dostaneme

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ac) + (ab + bc + ac) \leqq 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

A keďže čísla a, b, c sú kladné, dostávame odhad

$$a + b + c \leqq \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Ostáva ukázať, že túto hodnotu možno aj dosiahnuť. Najjednoduchšou možnosťou je vyskúšať $a = b = c$ (lebo potom nerovnosť (2) prejde na rovnosť). V tomto prípade z danej nerovnosti vyjde $6a^2 \leqq 1$ s rovnosťou pre $a = b = c = 1/\sqrt{6}$; pritom pre tieto hodnoty naozaj vychádza $a + b + c = \sqrt{3/2}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre kladné čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + ab \leqq 2$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčinu ab. [Využite odhad $2ab \leqq a^2 + b^2$, najväčšia hodnota $ab = 2/3$ sa dosiahne pre $a = b = \sqrt{2/3}$.]

N2. Dokážte nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$ a zistite, kedy v nej nastáva rovnosť. [Prenásobíme dvoma a upravíme na tvar $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$, rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = b = c$.]

N3. Reálne čísla a, b, c majú súčet 3. Dokážte, že $3 \geqq ab + bc + ca$. Kedy nastane rovnosť? [Vyplýva z rovnosti $9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ a z predošlej úlohy. Rovnosť nastane jedine v prípade $a = b = c = 1$.]

D1. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 3, a každé z nich je nanajvýš 2. Dokážte, že platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9$. [68-C-I-3]

D2. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu $V = (a^4 + b^4 + ab + 1)/(a + b)$. [68-B-I-4]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Tomáš Jurík, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019