1. *V reálnom obore uvažujme sústavu rovníc*

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$
$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálnym parametrom a.

a) Nájdite všetky hodnoty a, pre ktoré má uvedená sústava riešenie.

b) Dokážte, že pre ľubovoľné riešenie (x, y) tejto sústavy platí $x^2 + |y| \geqq 4$.

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Sústavu riešime ako lineárnu sústavu rovníc s neznámymi x^4 a y^2. Sčítaním oboch rovníc a vydelením dvoma dostaneme

$$x^4 = \frac{1}{2}\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^3\right) = a^3 + \frac{3}{a}. \tag{1}$$

Podobne odčítaním druhej rovnice od prvej a vydelením dvoma dostaneme

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^3\right) = 3a + \frac{1}{a^3}. \tag{2}$$

a) Ak daná sústava rovníc má riešenie v obore reálnych čísel, nutne $y^2 \geqq 0$. Zo vzťahu (2) vidíme, že musí byť $a > 0$. Naopak, ak je $a > 0$, sú obe pravé strany rovníc (1) a (2) kladné, a ich odmocnením tak nájdeme reálne čísla x a y, ktoré sú riešením ako sústavy (1) $\wedge$ (2), tak aj s ňou ekvivalentnej pôvodnej sústavy rovníc.

b) Pre kladné reálne číslo a podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch kladných čísel x^2 a $|y|$ a vďaka rovnostiam (1) a (2) platí

$$x^2 + |y| \geqq 2\sqrt{x^2|y|} = 2\sqrt[4]{x^4y^2} = 2\sqrt[4]{\left(a^3 + \frac{3}{a}\right)\left(3a + \frac{1}{a^3}\right)} = 2\sqrt[4]{3\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) + 10}.$$

Podľa rovnakej nerovnosti medzi priemermi kladných reálnych čísel a^4 a $1/a^4$ ďalej platí

$$a^4 + \frac{1}{a^4} \geqq 2\sqrt{a^4 \cdot \frac{1}{a^4}} = 2.$$

Spolu dostávame

$$x^2 + |y| \geqq 2\sqrt[4]{3\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) + 10} \geqq 2\sqrt[4]{16} = 4,$$

čo sme mali dokázať.

Dva priemery (aritmetický a geometrický), na ktoré sme sa odvolali (dokonca dvakrát), sa vo všeobecnosti rovnajú iba v situácii, keď sa rovnajú obe priemerované hodnoty (pozri návodnú úlohu N3).

Rovnosť v dokázanej nerovnosti nastane práve vtedy, keď $x^2 = |y|$ a súčasne $a^4 = 1/a^4$. Z druhej rovnosti vzhľadom na $a > 0$ dostávame $a = 1$, čo dosadené do (1) a (2) dáva $x^4 = 4$ a $y^2 = 4$, je teda splnená aj prvá rovnosť $x^2 = |y| = 2$. Rovnosť v dokázanej nerovnosti teda nastane práve vtedy, keď $a = 1$.

Poznámka. Ak riešitelia poznajú aj nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom štyroch nezáporných čísel, môžu časť b) dokázať nasledovne. Platí

$$x^4 = a^3 + \frac{3}{a} = a^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geqq 4\sqrt[4]{a^3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}} = 4,$$

pričom rovnosť tu nastane práve vtedy, keď $a = 1$. Podobne sa dokáže aj nerovnosť

$$y^2 = 3a + \frac{1}{a^3} \geqq 4$$

opäť s dodatkom, že rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = 1$. Potom už ľahko dostaneme

$$x^2 + |y| = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^2} \geqq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre ktoré hodnoty reálneho parametra a má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a, \\ 2x^2 + y^2 &= a^2 \end{aligned}$$

riešenie v obore reálnych čísel? [Riešime ako lineárnu sústavu rovníc s neznámymi x^2, y^2, dostaneme $x^2 = a^2 - a = a(a-1)$, $y^2 = 2a - a^2 = a(2-a)$. Z $x^2 \geqq 0$ dostaneme $a \in \mathbb{R} \setminus (0;1)$, z $y^2 \geqq 0$ máme $a \in \langle 0; 2\rangle$, obe podmienky spĺňajú $a \in \{0\} \cup \langle 1; 2\rangle$.]

N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2a, \\ x - y + z &= 2b, \\ -x + y + z &= 2c. \end{aligned}$$

s reálnymi parametrami a, b, c [$x = a + b$, $y = a + c$, $z = b + c$.]

N3. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí tzv. nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (AG-nerovnosť)

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Dokážte. Kedy nastane rovnosť? [Nerovnosť upravíme na $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$, ktorá zrejme platí. Rovnosť nastane iba v prípade $a = b$.]

N4. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d platí

$$(ab + cd)\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right) \geqq 4.$$

[Roznásobíme výraz na ľavej strane a využijeme nerovnosť $x + 1/x \geqq 2$ (platnú $\forall x > 0$) pre $x = a/d$ a pre $x = b/c$.]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť. [59-C-II-2]

D2. Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré výraz $2x^2+y^2-2xy+2x+4$ nadobúda svoju najmenšiu hodnotu. [65-C-I-3, časť a)]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. [59-C-I-5]

D4. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2-12xy+y^4,$$

v ktorom x a y sú ľubovoľné celé nezáporné čísla. [65-C-II-1]

D5. Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

pričom x je ľubovoľné reálne číslo. Pre ktoré x výraz V túto hodnotu nadobúda? [64-B-II-2]

D6. Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

[63-B-I-2]

D7. Určte všetky reálne čísla p také, že pre ľubovoľné kladné čísla x, y platí nerovnosť

$$\frac{x^3+py^3}{x+y} \geqq xy.$$

[50-B-II-1]

D8. Nájdite všetky možné hodnoty súčtu $x+y$, kde reálne čísla x, y spĺňajú rovnosť $x^3 + y^3 = 3xy$. [48-B-I-6]

---

2. *Prirodzené číslo n má aspoň 73 dvojciferných deliteľov. Dokážte, že jedným z nich je číslo 60. Uveďte tiež príklad čísla n, ktoré má práve 73 dvojciferných deliteľov, vrátane náležitého zdôvodnenia.* (*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Keďže $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, stačí v prvej časti dokázať, že prirodzené číslo n je súčasne deliteľné navzájom nesúdeliteľnými číslami 3, 4 a 5. Na to pre každé z týchto čísel stačí ukázať, že je ním deliteľný aspoň jeden dvojciferný deliteľ čísla n.

Dvojciferných čísel je celkom 90. Medzi nimi sú deliteľné piatimi čísla $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5, \ldots, 95 = 19 \cdot 5$, ktorých je práve 18. Medzi dvojcifernými číslami je tak $90 - 18 = 72$ čísel, ktoré 5 deliteľné nie sú. Podľa Dirichletovho princípu tak medzi ľubovoľnými 73 dvojcifernými číslami je aspoň jedno z nich deliteľné 5, teda číslo 5 delí aj číslo n zo zadania úlohy. Podobne dvojciferné čísla deliteľné štyrmi sú $12 = 3 \cdot 4$ až $96 = 24 \cdot 4$, ktorých je práve 22, teda zvyšných $90 - 22 = 68$ čísel štyrmi deliteľných nie je. Medzi ľubovoľnými 73 dvojcifernými číslami je tak aspoň jedno, ktoré je deliteľné 4. A napokon číslom 3 sú deliteľné dvojciferné čísla $12 = 4 \cdot 3$ až $99 = 33 \cdot 3$, ktorých je 30, a teda podľa Dirichletovho princípu medzi 73 dvojcifernými číslami je aspoň jedno deliteľné tromi. Tým je prvá časť riešenia hotová.

Teraz nájdeme príklad čísla n, ktoré má práve 73 dvojciferných deliteľov. Stačí sa určite obmedziť na delitele najmenšieho spoločného násobku všetkých dvojciferných čísel, teda čísla

$$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \underbrace{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 97}_{\text{súčin všetkých dvojciferných prvočísel}}.$$

Vyberajme v poradí podľa veľkosti prvočíselné delitele pre číslo n v mocnine, v akej sa vyskytujú v uvedenom súčine, a postupne počítajme, koľko nových dvojciferných deliteľov čísla n každé nové prvočíslo prinesie.

Nech teda najvyššia mocnina 2 deliaca číslo n je 2^6. Číslo n tak bude deliteľné tromi dvojcifernými číslami

$$2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64.$$

Podobne ak najvyššia mocnina čísla 3, ktorá delí n, je $3^4 = 81$, bude číslo n ďalej deliteľné dvojcifernými číslami

$$3 \cdot 4 = 12, \quad 3 \cdot 8 = 24, \quad 3 \cdot 16 = 48, \quad 3 \cdot 32 = 96,$$
$$3^2 \cdot 2 = 18, \quad 3^2 \cdot 4 = 36, \quad 3^2 \cdot 8 = 72, \quad 3^3 = 27, \quad 3^3 \cdot 2 = 54, \quad 3^4 = 81,$$

ktorých je 10.

Podobne ak najvyššia mocnina čísla 5, ktorá delí delí n, je 5^2, bude číslo n ďalej deliteľné dvojcifernými číslami

$$5 \cdot 2 = 10, \quad 5 \cdot 3 = 15, \quad 5 \cdot 4 = 20, \quad 5 \cdot 5 = 25, \quad 5 \cdot 6 = 30, \quad 5 \cdot 8 = 40,$$
$$5 \cdot 9 = 45, \quad 5 \cdot 10 = 50, \quad 5 \cdot 12 = 60, \quad 5 \cdot 15 = 75, \quad 5 \cdot 16 = 80, \quad 5 \cdot 18 = 90,$$

ktorých je 12.

A ak najvyššia mocnina čísla 7, ktorá delí n, je 7^2, bude číslo n zatiaľ deliteľné číslami od 2 do 14 s výnimkou čísel 11 a 13. Týchto čísel je 11. Číslo n tak bude mať ďalej dvojciferné delitele, ktoré získame vynásobením čísla 7 týmito 11 číslami. Vidíme, že teraz má takto vybrané číslo n už $3 + 10 + 12 + 11 = 36$ deliteľov.

Všetky dvojciferné prvočísla $11, 13, \ldots$ sa v úvodnom súčine vyskytujú v prvej mocnine. Pokračujme preto v rozširovaní doposiaľ vytvorenej hodnoty $n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ s 36 dvojcifernými deliteľmi o dvojciferné prvočíselné delitele s jediným zastúpením, a to opäť postupne podľa ich veľkosti. Pridaním prvočísla 11 získa číslo n ďalších 9 dvojciferných deliteľov od $11 \cdot 1 = 11$ do $11 \cdot 9 = 99$. Potom bude mať číslo n už $36 + 9 = 45$ deliteľov.

Pridaním prvočísla 13 budú ďalšími siedmimi dvojcifernými deliteľmi čísla n čísla $13 \cdot 1 = 13$ až $13 \cdot 7 = 91$, celkom už teda máme $45 + 7 = 52$ dvojciferných deliteľov čísla n. S každým pridaným prvočíslom $p \in \{17, 19\}$, ktorým bude číslo n deliteľné, mu pribudne päť dvojciferných deliteľov od p do $5p$, a bude ich mať $52 + 10 = 62$. S prvočíslom 23 dostaneme ďalšie štyri dvojciferné delitele $23 \cdot 1 = 23$ až $23 \cdot 4 = 92$, celkom ich už máme $62 + 4 = 66$. S každým z prvočísel $p \in \{29, 31\}$ dostaneme ďalšie tri dvojciferné delitele p, $2p$, $3p$, takže dvojciferných deliteľov už je $66 + 6 = 72$. Chýba už iba jeden dvojciferný deliteľ do požadovaného počtu 73, za neho musíme vziať nejaké prvočíslo väčšie ako 50, napríklad 53.

Práve 73 dvojciferných deliteľov tak má napríklad číslo

$$n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 53.$$

Pri konštrukcii vyhovujúceho čísla n môžeme postupovať aj inak: ak napríklad najvyššia mocnina čísla 3, ktorá delí n, bude iba 3^3 a v závere namiesto prvočísla 53 vezmeme prvočíslo 37, bude nové n mať navyše dvojciferné delitele 37 a 74 a z pôvodných príde o delitele 81 a 53. Dostaneme tak iné vyhovujúce číslo

$$n_1 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Iné riešenie. Najmenší spoločný násobok všetkých 90 dvojciferných čísel

$$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \underbrace{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 97}_{\text{súčin všetkých dvojciferných prvočísel}}$$

má práve 90 dvojciferných deliteľov. Ak ho vydelíme všetkými prvočíslami od 53 do 97, ktorých je práve 10, príde výsledné číslo o desať dvojciferných deliteľov, a bude tak mať iba 80 dvojciferných deliteľov.

Ak tento podiel ďalej vydelíme prvočíslami $p \in \{37, 41, 43, 47\}$, príde vzniknuté číslo s každým prvočíslom p o dvojciferné delitele p a $2p$. Po týchto štyroch deleniach tak bude mať výsledné číslo ešte $80 - 8 = 72$ dvojciferných deliteľov. Ak by sme ďalej vydelili toto číslo nasledujúcim prvočíslom 31, stratili by sme už tri dvojciferné delitele, 31, 62 a 93, čo je priveľa. Aby ubudol jeden dvojciferný deliteľ, stačí naše číslo deliť 3 (stratíme iba deliteľa $3^4 = 81$) alebo 2 (ubudne deliteľ $2^6 = 64$) a dostaneme tak vyhovujúce čísla

$$n_1 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$$

(ktoré sme obdržali už predchádzajúcou konštrukciou) a

$$n_2 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Uvedomme si, že ak by sme v poslednom kroku vydelili doposiaľ zostrojené číslo namiesto 2 alebo 3 prvočíslom 5, ubudli by nám tri delitele 25, 50, 75.

Dodajme ešte pre zaujímavosť, že najmenší spoločný násobok všetkých dvojciferných čísel (vypísaný v prvej vete tohto riešenia) má 248 446 976 deliteľov, ktoré majú po 73 dvojciferných deliteľoch. Najmenší z nich je číslo n_1 nájdené postupom z pôvodného riešenia, najväčší potom číslo n_3, ktoré dostaneme, keď východiskový najmenší spoločný násobok vydelíme súčinom $2 \cdot 11 \cdot 13$:

$$n_3 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \underbrace{17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 97}_{\text{súčin všetkých dvojciferných prvočísel od 17 do 97}}.$$

Iné riešenie. Ukážeme ešte jednu konštrukciu čísla, ktoré má práve 73 dvojciferných deliteľov. Vezmime súčin všetkých dvojciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné siedmimi,

t. j. vynecháme čísla $2 \cdot 7, \dots, 14 \cdot 7$, ktorých je 13. Vytvoríme tak súčin $90 - 13 = 77$ čísel, ktorý má práve týchto 77 dvojciferných deliteľov, lebo žiadne z nich nie je deliteľné siedmimi, ako je naopak každé z 13 vynechaných čísel. Je teda nutné ešte štyri delitele zrušiť, a to napríklad tak, že zo súčinu odstránime štyri činitele, za ktoré vyberieme ľubovoľné štyri prvočísla väčšie ako 50, napríklad štyri najväčšie 97, 89, 83 a 79, a budeme potom hotoví. Dostaneme tak vyhovujúce číslo

$$n_4 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot \underbrace{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 73}_{\text{súčin všetkých dvojciferných prvočísel od 11 do 73}}.$$

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Prirodzené číslo n nie je deliteľné siedmimi. Dokážte, že má nanajvýš 85 deliteľov menších ako 100. [Číslo n určite nie je deliteľné 14 číslami z množiny $\{7, 14, 21, 28, \dots, 98\}$, teda počet jeho deliteľov menších ako 100 je nanajvýš $99 - 14 = 85$.]

N2. Nájdite prirodzené číslo n, ktoré nie je deliteľné siedmimi a má práve 85 deliteľov menších ako 100. [Za n stačí vziať súčin všetkých čísel menších ako 100, ktoré nie sú násobkami siedmich.]

N3. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo 2020^{2019}? [Keďže $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, dvojciferné delitele čísla 2020^{2019} budú práve tie, ktoré majú v prvočíselnom rozklade iba dvojky a päťky. Sú to čísla (usporiadané najskôr podľa mocnín čísla 5 a potom podľa mocnín čísla 2, ktoré ho delia)

$$2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \quad 5 \cdot 2 = 10, \quad 5 \cdot 2^2 = 20,$$
$$5 \cdot 2^3 = 40, \quad 5 \cdot 2^4 = 80, \quad 5^2 = 25, \quad 5^2 \cdot 2 = 50,$$

ktorých je práve 9.]

N4. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7$? [Tých je 36. To zistíme buď priamo ich vypísaním (10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80, 81, 84, 90, 96, 98), alebo zistením o zozname všetkých 21 dvojciferných prvočísel 11, 13, ..., 97, že majú spolu 54 dvojciferných násobkov, a to jednotlivo postupne 9, 7, 5 (dvakrát), 4, 3 (dvakrát), 2 (štyrikrát) a 1 (desaťkrát) – hľadaný počet je teda $90 - 54 = 36$.]

N5. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo $50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$? [Na rozdiel od predchádzajúcej úlohy je jednoduchšie spočítať čísla, ktoré deliteľmi nie sú. Sú to všetky prvočísla väčšie ako 50, tých je 10. Počet všetkých dvojciferných deliteľov tak je 80. Treba si rozmyslieť, že prvočísla menšie ako 50 sú obsiahnuté v čísle 50! v dostatočnej mocnine.]

D1. Koľko dvojciferných deliteľov má číslo 20!? [Stačí vylúčiť prvočísla väčšie ako 20 a ich násobky, tých je 28. Počet všetkých dvojciferných deliteľov tak je 62. Treba si rozmyslieť, že prvočísla menšie ako 20 sú obsiahnuté v čísle 20! v dostatočnej mocnine.]

D2. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré má $n!$ viac dvojciferných deliteľov ako $(n-1)!$. [Určite sú to všetky prvočísla do sto, ktoré sú väčšie ako 3, a potom čísla, keď $n!$ obsahuje vyššiu mocninu nejakého prvočísla ako $(n-1)!$ takú, že táto mocnina je menšia ako sto, t. j. pre $p = 7$ je to $n = 14$, pre $p = 5$ $n = 10$, pre $p = 3$ $n = 6, 9$ a pre $p = 2$ $n = 4, 6, 8$, t. j. sú to všetky prvočísla od 5 do 97 a navyše $4, 6, 8, 9, 10, 14$.]

D3. Existuje prirodzené číslo n, že $n!$ je deliteľný práve polovicou zo všetkých dvojciferných čísel? [Treba brať prvočísla menšie ako sto od najväčšieho a pozerať sa, koľko jeho násobkov je menších ako 100. Ukáže sa, že 12! má 43 dvojciferných deliteľov a 13! má 50 dvojciferných deliteľov, t. j. 45 dvojciferných deliteľov nemá žiadne $n!$.]

D4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo. [56-B-I-3]

D5. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje. [58-C-I-5]

D6. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 1\,999\}$, potom medzi vybranými existujú dve rôzne čísla, ktorých súčet sa rovná $2\,000$. [49-C-S-1]

D7. Určte najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2\,000\}$, tak medzi vybranými číslami existujú dve, ktorých súčet alebo rozdiel je 667. [49-A-S-3]

D8. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú rovnaký počet párnych a nepárnych deliteľov. [Sú to čísla tvaru $2l$, pričom l je nepárne číslo. Každé hľadané číslo musí byť párne – vtedy však predpis $d \mapsto 2d$ určuje injektívne zobrazenie množiny všetkých jeho nepárnych deliteľov do množiny všetkých jeho párnych deliteľov, teda toto zobrazenie musí byť podľa zadania aj surjektívne, a preto je hľadané číslo tvaru $2l$, pričom l je jeho najväčší nepárny deliteľ.]

D9. Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15}. Určte n. [64-B-II-1]

---

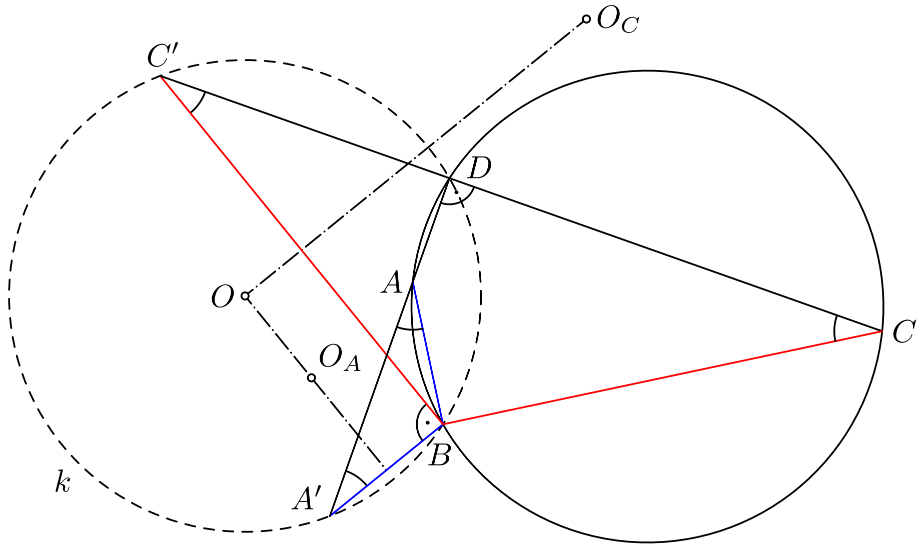
3. *Nech AC je priemer kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $ABCD$. Predpokladajme, že na polpriamkach opačných k polpriamkam AD a DC existujú postupne body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ také, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokážte tvrdenia:*

a) Body A', B, C' a D ležia na jednej kružnici k.

b) Ak je O stred kružnice k a O_A, O_C sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AA'B$, $CC'B$, tak platí $OO_A \perp OO_C$.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. a) Keďže štvoruholník $ABCD$ je tetivový, je súčet jeho vnútorných uhlov pri vrcholoch A a C rovný 180°, teda uhly BCD a BAA' sú zhodné (druhý z nich je vonkajší k vnútornému uhlu štvoruholníka pri vrchole A, obr. 1). Trojuholník ABA' je z rovnosti $|AB| = |A'B|$ rovnoramenný, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A a A' sú preto zhodné. Podobne sú zhodné vnútorné uhly pri vrcholoch C a C' v trojuholníku BCC'. Teda aj uhly $DC'B$ a $DA'B$ sú zhodné. Keďže body A' a C' ležia v jednej polrovine BDA, vyplýva z toho podľa vety o obvodovom uhle, že body A', B, D a C' ležia na jednej kružnici k, čo sme mali dokázať.



Obr. 1

b) Keďže AC je priemerom kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$, je podľa Tálesovej vety uhol ADC, teda aj uhol $A'DC$ (a k nemu vedľajší uhol $A'DC'$) pravý. Úsečka $A'C'$ je preto z Tálesovej vety priemerom kružnice k, teda aj uhol $A'BC'$ je pravý. Body O a O_A ležia na osi úsečky BA', podobne aj body O a O_C ležia na osi úsečky BC'. Avšak, ako sme už dokázali, úsečky BA' a BC' sú na seba kolmé, takže aj ich osi OO_A a OO_C sú na seba kolmé, a teda platí $OO_A \perp OO_C$, čo sme mali dokázať.

Poznámka. Dodajme pre zaujímavosť, že obe kružnice na obr. 1 sú zhodné, lebo sú opísané trojuholníkom ABC a $A'BC'$, a tie sú zhodné podľa vety *sus* (ako vyplýva z dvoch rovností zo zadania a z nášho zistenia v časti b) riešenia, že pravý je nielen uhol ABC, ale aj uhol $A'BC'$).

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Pripomeňte si Tálesovu vetu a všeobecnejší poznatok o obvodových a stredových uhloch v danej kružnici.

N2. Štyri rôzne body A, B, C, D ležia na jednej kružnici. Dokážte, že osi úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD prechádzajú tým istým bodom. [Je to stred kružnice prechádzajúcej bodmi A, B, C, D.]

N3. Nech M je vnútorný bod základne BC rovnoramenného trojuholníka ABC. Na jeho ramene AB leží bod D tak, že $|MB| = |MD|$. Dokážte, že body A, C, M, D ležia na jednej kružnici. [Z rovnoramenných trojuholníkov ABC a MBD vyplýva postupne zhodnosť uhlov ACM, ACB, CBA, MBD a MDB, posledný z nich je však vedľajší uhol k uhlu ADM, takže súčet uhlov pri protiľahlých vrcholoch C a D štvoruholníka $ADMC$ je rovný $180°$.]

D1. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD. [68-B-I-5]

D2. Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Os uhla ABD pretína kružnicu k v bode E (rôznom od bodu B). Dokážte, že trojuholníky AEC a CBD sú podobné. [68-B-S-3]

D3. Daná je kružnica k so stredom S a tetivou AB, ktorá nie je jej priemerom. Na polpriamke opačnej k polpriamke BA je vybraný ľubovoľný bod K rôzny od B. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKS pretína kružnicu k v takom bode C, ktorý je súmerne združený s bodom B podľa priamky SK. [68-B-II-3]

D4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme D pätu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových súmernostiach postupne podľa priamok AB, AC. Ďalej označme E_1 a E_2 body na priamke BC také, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokážte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 ležia na jednej kružnici, ktorej stred leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. [68-A-I-2]

D5. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici. [62-B-I-3]

D6. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu, ktorá prechádza bodmi B, C a dotýka sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte. [52-B-II-4]

D7. V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD. [57-B-II-3]

D8. Označme K ľubovoľný vnútorný bod strany AB daného trojuholníka ABC. Priamka CK pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AKL a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BKL.
   a) Dokážte, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2.
   b) Predpokladajme, že priamka AC je sečnicou kružnice k_1. Nech P ($P \neq A$) je priesečník priamky AC s kružnicou k_1 a Q ($Q \neq B$) je priesečník priamky BC s kružnicou k_2. Dokážte, že bod K leží na úsečke PQ. [53-A-II-3]

D9. Dané sú kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL. [60-A-I-3]

4. *Nech p, q sú dané nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak má rovnica*

$$px^2 - (p+q)x + p = 0$$

celočíselný koreň, tak má celočíselný koreň aj rovnica

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Nech x_0 je celočíselný koreň prvej rovnice. Z jej prepisu na tvar

$$p(x_0^2 + 1) = (p+q)x_0 \tag{1}$$

vidíme, že $x_0 > 0$, pretože zvyšné činitele p, $x_0^2 + 1$ a $p + q$ v (1) sú podľa predpokladu prirodzené čísla. Najväčší spoločný deliteľ čísel x_0 a $x_0^2 + 1$ delí aj číslo $(x_0^2 + 1) - x_0 \cdot x_0 = 1$, takže čísla x_0 a $x_0^2 + 1$ sú nesúdeliteľné, a z rovnice (1) tak vyplýva, že x_0 delí číslo p. Naopak, z nesúdeliteľnosti čísel p a q vyplýva aj nesúdeliteľnosť čísel p a $p + q$, a tak z vyššie uvedenej rovnice vidíme, že aj číslo p delí x_0. Keďže obe tieto čísla sú prirodzené, vyplýva z toho $x_0 = p$.

Keď dosadíme p za x_0 do (1) a potom obe strany vydelíme nenulovou hodnotou p, dostaneme

$$p^2 + 1 = p + q, \quad \text{čiže} \quad q = p^2 - p + 1.$$

Teraz toto vyjadrenie čísla q dosadíme do druhej zadanej rovnice a postupne upravíme:

$$\begin{aligned} 0 &= px^2 + (p^2 - p + 1)x + p^2 - (p^2 - p + 1) = \\ &= px^2 + (p^2 - p + 1)x + p - 1 = (px + 1)(x + p - 1). \end{aligned}$$

Vidíme, že upravená, a teda aj druhá pôvodne zadaná rovnica má celočíselný koreň $1 - p$. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Poznámka. Kľúčový vzťah $q = p^2 - p + 1$ môžeme tiež odvodiť tak, že rovnosť (1) prepíšeme na tvar

$$\frac{p}{p+q} = \frac{x_0}{x_0^2 + 1},$$

v ktorom na oboch stranách stoja zlomky v základnom tvare, takže sa musia rovnať ako ich čitatele, tak aj menovatele: $p = x_0$ a $p + q = x_0^2 + 1 = p^2 + 1$, odkiaľ už máme $q = p^2 - p + 1$.

Poznámka. Ukážeme na príkladoch, že pre súdeliteľné prirodzené čísla p, q tvrdenie úlohy vo všeobecnosti neplatí. Pre $p = q = 2$ má prvá rovnica $2x^2 - 4x + 2 = 0$ celočíselný koreň 1, zatiaľ čo druhá rovnica $2x^2 + 2x + 2 = 0$ nemá žiadny koreň. Iná situácia nastane pre $p = 14$ a $q = 86$: prvá rovnica $14x^2 - 100x + 14 = 0$ má koreň 7, avšak druhá rovnica $14x^2 + 86x + 110 = 0$ má iba iracionálne korene.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že ak a, b a c sú kladné reálne čísla, tak je kladný aj každý koreň kvadratickej rovnice $ax^2 - bx + c = 0$. [Ľavá strana rovnice je kladná pre každé $x \leqq 0$.]

N2. Dokážte, že ak má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ celočíselné koeficienty a, b a c, tak každý jej koreň, ktorý je aj celým číslom, musí byť deliteľom čísla c. [Vyplýva to z úpravy rovnice na tvar $c = -x(ax + b)$.]

N3. Nech prirodzené číslo a je deliteľom prirodzeného čísla b a súčasne číslo b je deliteľom a. Potom $a = b$. Dokážte. [Platí $a \leqq b$ aj $b \leqq a$.]

N4. Prirodzené čísla a a b sú nesúdeliteľné, rovnako ako prirodzené čísla c a d. Dokážte, že z rovnosti $ac = bd$ potom vyplýva $a = d$ a $b = c$. [Uvedomte si, kedy z $x \mid yz$ vyplýva $x \mid z$.]

N5. Dokážte, že ak sú čísla a, b nesúdeliteľné, platí to isté aj o číslach a, $a + b$. [Každý spoločný deliteľ čísel a, $a + b$ delí aj číslo $(a + b) - a = b$.]

N6. Nech a je prirodzené číslo, určte všetky možné najväčšie spoločné delitele čísel a a $a^2 + {}$ $+4$. [Nech d je najväčší spoločný deliteľ oboch čísel, potom d delí číslo $(a^2+4)-a\cdot a = 4$. Najväčší spoločný deliteľ oboch čísel teda môže byť 1, 2 alebo 4. Prvá možnosť nastane pre a nepárne, druhá pre a deliteľné dvoma a nie štyrmi, tretia pre a deliteľné štyrmi.]

N7. Nech p je prirodzené číslo. Nájdite korene rovnice $px^2 + (p^2 - p + 1)x + p - 1 = 0$. [$x_1 = -1/p$, $x_2 = 1 - p$]

D1. Nájdite všetky trojciferné čísla n, ktorých druhá mocnina končí rovnakým trojčíslím ako druhá mocnina čísla $3n - 2$. [50-B-S-1]

D2. Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice $a^2 + 7ab + 6b^2 + {}$ $+ 5a + 4b + 3 = 0$. [56-B-I-1]

D3. Nájdite všetky riešenia rovnice $xyz = 3(x + y + z)$ v obore celých kladných čísel. Riešenia, ktoré sa líšia iba poradím, nepovažujeme za rôzne. [36–B–II–3b]

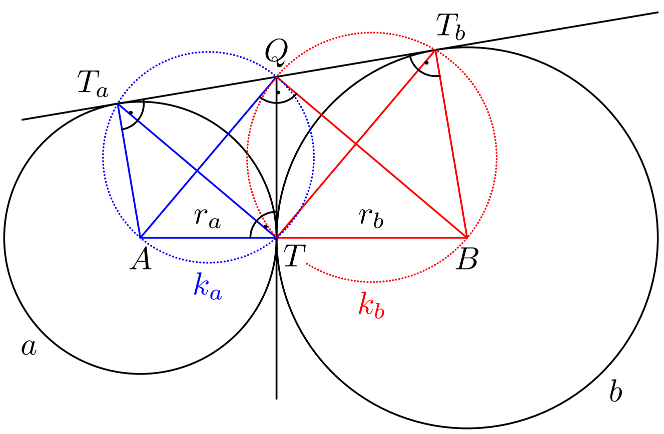
D4. Koľko existuje celých kladných čísel $x \leqq 2\,002\,000$ takých, že číslo 2 002 000 delí číslo $x^3 - x$? [41–B–I–6]

D5. Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je deliteľné šiestimi práve pre tie prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ deliteľné trinástimi. Dokážte. [45–B–I–4]

---

5. *Dané sú kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode T. Ich spoločná vonkajšia dotyčnica sa dotýka kružnice a v bode T_a a kružnice b v bode T_b. Pomocou r_a, r_b vyjadrite pomer polomerov kružníc k_a, k_b opísaných postupne trojuholníkom T_aAT, T_bBT.* (*Šárka Gergelitsová*)

Riešenie. Označme Q priesečník spoločnej vonkajšej dotyčnice T_aT_b so spoločnou vnútornou dotyčnicou kružníc a a b v bode T. Dotyčnica ku kružnici zviera s priemerom tejto kružnice prechádzajúcim bodom dotyku pravý uhol, a tak uhly AT_aQ a ATQ sú pravé. Body T_a a T preto ležia podľa Tálesovej vety na kružnici s priemerom AQ, táto kružnica je potom aj kružnicou k_a opísanou trojuholníku T_aAT (obr. 2). Podobne ukážeme, že QB je priemerom kružnice k_b.



Obr. 2

Priamky QT a QT_a sú dotyčnice kružnice a, priamka QA prechádzajúca jej stredom je tak osou uhla TQT_a. Z podobného dôvodu je priamka QB osou uhla TQT_b. Uhol T_aQT_b je priamy, priamky AQ a BQ tak zvierajú pravý uhol a trojuholník ABQ je pravouhlý. Veľkosť jeho odvesny AQ je podľa Euklidovej vety $|AQ| = \sqrt{r_a(r_a + r_b)}$ a pre veľkosť druhej odvesny platí $|BQ| = \sqrt{r_b(r_a + r_b)}$.

Hľadaný pomer polomerov kružníc opísaných trojuholníkom T_aAT, T_bBT je rovný pomeru veľkostí ich priemerov AQ a BQ, teda

$$\frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{\sqrt{r_a(r_a + r_b)}}{\sqrt{r_b(r_a + r_b)}} = \sqrt{\frac{r_a}{r_b}}.$$

Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení uvažujme priesečník Q spoločnej vnútornej a vonkajšej dotyčnice kružníc a, b. Zo symetrie dotyčníc ku kružnici a vyplýva $|TQ| = |T_aQ|$ a podobne zo symetrie dotyčníc ku kružnici b vyplýva $|TQ| = |T_bQ|$. Bod Q je preto stredom kružnice opísanej trojuholníku TT_aT_b a jeho strana T_aT_b je zároveň jej priemerom. Podľa Tálesovej vety je teda uhol T_aTT_b pravý. Súčet veľkostí uhlov ATT_a a BTT_b je tak $90°$. Z kolmosti $QT \perp AT$ potom dostávame, že uhol T_aTQ má rovnakú veľkosť ako uhol T_bTB, a preto sú rovnoramenné trojuholníky T_aQT a T_bBT podobné. Bod Q ale leží na kružnici k_a opísanej trojuholníku ATT_a, lebo štvoruholník $ATQT_a$ je podľa Tálesovej vety tetivový. V podobnosti trojuholníkov $T_aQT \sim T_bBT$ tak kružnici k_a zodpovedá kružnica k_b, ktorá je opísaná trojuholníku T_bBT. Z toho vyplýva, že pomer polomerov kružníc k_a a k_b je rovný pomeru dĺžok ich tetív QT a BT. Analogickou úvahou o podobnosti trojuholníkov $T_aAT \sim T_bQT$ s prihliadnutím na to, že bod Q leží na kružnici b, dostaneme, že ten istý pomer je rovnaký ako pomer dĺžok iných ich tetív AT a QT. Preto hodnotu p hľadaného pomeru môžeme získať ako odmocninu zo súčinu jej rovných hodnôt:

$$p = \sqrt{\frac{|QT|}{|BT|} \cdot \frac{|AT|}{|QT|}} = \sqrt{\frac{|AT|}{|BT|}} = \sqrt{\frac{r_a}{r_b}}.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech V_a a V_b sú päty výšok trojuholníka ABC postupne z vrcholov A a B a V je priesečník jeho výšok. a) Dokážte, že body A, B, V_a, V_b ležia na jednej kružnici. b) Dokážte, že body V, V_a, C, V_b ležia na jednej kružnici. [a) Podľa Tálesovej vety je to kružnica s priemerom AB. b) Podľa Tálesovej vety je to kružnica s priemerom CV.]

N2. Pripomeňte si znenie Euklidových viet o výške a odvesne pravouhlého trojuholníka.

N3. Kružnica k_b leží zvonka kružnice k_a a je s ňou disjunktná. Nech ich vonkajšie spoločné dotyčnice T_aT_b a T_AT_B ($T_a, T_A \in k_a$, $T_b, T_B \in k_b$, $T_a \neq T_A$ a $T_b \neq T_B$) pretínajú ich spoločnú vnútornú dotyčnicu V_aV_b ($V_a \in k_a$, $V_b \in k_b$) postupne v bodoch A a B. Dokážte, že $|T_aT_b| = |T_AT_B| = |AB|$. [Prvá rovnosť vyplýva zo súmernosti podľa priamky prechádzajúcej stredmi oboch kružníc. Ďalej zo súmernosti platí $|T_aA| = |V_aA|$, $|T_bA| = |V_bA|$, $|T_AB| = |V_aB|$, $|T_BB| = |V_bB|$. Sčítaním týchto rovníc dostaneme $|T_aA| + |T_bA| + |T_AB| + |T_BB| = |V_aA| + |V_bA| + |V_aB| + |V_bB|$. Na ľavej strane rovnice je súčet (rovnakých) dĺžok $|T_aT_b|$ a $|T_AT_B|$, na pravej dvojnásobok $|AB|$, odtiaľ tak vyplýva druhá dokazovaná rovnosť.]

D1. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC. [58-C-I-2]

D2. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S. [58-C-II-4]

D3. Nech k je polkružnica zostrojená nad priemerom AB, ktorá leží vo vnútri štvorca $ABCD$. Uvažujme jej dotyčnicu t_1 z bodu C (rôznu od BC) a označme P jej priesečník so stranou AD. Nech t_2 je spoločná vonkajšia dotyčnica polkružnice k a kružnice vpísanej trojuholníku CDP (rôzna od AD). Dokážte, že priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé. [51-B-I-3]

D4. Kružnice $k(S, r)$ a $l(O, R)$ sa zvonku dotýkajú v bode T. Ich spoločná dotyčnica v bode T pretína ich vonkajšiu spoločnú dotyčnicu v bode M. Dokážte, že trojuholník SOM je pravouhlý a vyjadrite jeho obsah pomocou polomerov r, R daných kružníc. [50-C-II-2]

D5. V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné. [66-B-II-3]

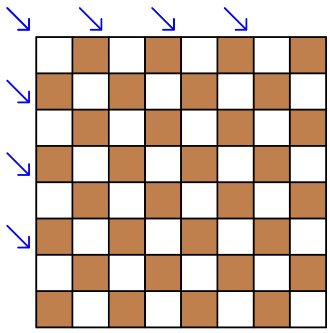
D6. Kružnica k so stredom S je opísaná pravidelnému šesťuholníku $ABCDEF$. Dotyčnica v bode A ku kružnici k pretína priamku SB v bode K a dotyčnica v bode B pretína priamku SC v bode L. Dokážte, že štvoruholníku $KLCB$ sa dá opísať kružnica, ktorá je zhodná s kružnicou k. [56-C-S-2]

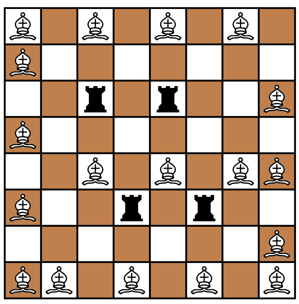
---

6. *Figúrka strelca ohrozuje na šachovnici ľubovoľné políčko diagonály, na ktorej strelec stojí. Ak však na niektorom políčku diagonály stojí veža, strelec už políčka za ňou neohrozuje. Určte najväčší možný počet strelcov, ktorých môžeme spolu so štyrmi vežami umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali.* (Ján Mazák)

Riešenie. Každé biele políčko leží na niektorej zo siedmich diagonál rovnobežných s bielou hlavnou diagonálou a vyznačených na obr. 3 šípkami. Podobne leží čierne políčko na niektorej zo siedmich diagonál rovnobežných s čiernou hlavnou diagonálou. Na každej z týchto diagonál bez veží môže stáť nanajvýš jeden strelec. Na prázdnu šachovnicu možno teda umiestniť nanajvýš 14 strelcov.

Vo všeobecnej situácii, keď je na šachovnici rozmiestnených povedzme k veží, pre každú diagonálu D zo 14 nami uvažovaných označíme k_D počet veží, ktoré na nej stoja. Celé čísla k_D sú teda nezáporné a ich súčet je rovný k. Prítomných k_D veží vymedzuje na diagonále D zrejme nanajvýš $k_D + 1$ úsekov políčok bez veže a na každom z nich môže byť nanajvýš jeden strelec, teda na celej diagonále D je dokopy nanajvýš $k_D + 1$ strelcov. Počet neohrozujúcich sa strelcov na celej šachovnici tak neprevyšuje súčet 14 čísel $k_D + 1$, ktorý je rovný $k + 14$, teda 18 v prípade $k = 4$.


Obr. 3


Obr. 4

Obr. 4 ukazuje príklad šachovnice so štyrmi vežami, na ktorú sme umiestnili 18 strelcov, aby sa navzájom neohrozovali.

Odpoveď. Hľadaný najväčší počet strelcov, ktorých možno umiestniť spolu so štyrmi vežami na šachovnicu tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali, je práve 18.

Návodné a doplňajúce úlohy:

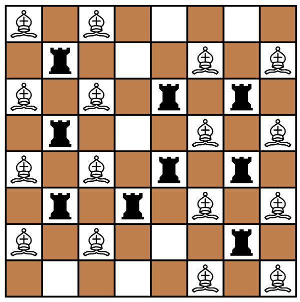
N1. Aký najväčší počet strelcov možno umiestniť na biele políčka šachovnice 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali? [Sedem. Na šachovnici uvažujme diagonály rovnobežné s bielou hlavnou diagonálou. Vrátane nej je ich práve 7. Na každú môžeme umiestniť nanajvýš jedného strelca. Keďže každé biele políčko leží na niektorej z týchto diagonál, môžeme na šachovnici umiestniť nanajvýš 7 strelcov. Vyhovujúce umiestnenie 7 strelcov môžeme vybrať napríklad tak, že budú v počtoch 4 a 3 v krajných stĺpcoch šachovnice.]

N2. Určte najväčší počet strelcov, ktorých môžeme umiestniť na bielu hlavnú diagonálu šachovnice 8×8 spolu s dvoma vežami tak, aby sa navzájom neohrozovali v zmysle zadania súťažnej úlohy. [Dve veže rozdelia diagonálu na nanajvýš tri časti. Na každú môžeme umiestniť nanajvýš jedného strelca. Preto je hľadaný počet strelcov nanajvýš tri. A týchto troch strelcov už vieme umiestniť na šachovnicu spolu s dvoma vežami požadovaným spôsobom, napríklad strelcov umiestnime na prvé, tretie a piate políčko a veže na druhé a štvrté políčko diagonály.]

N3. Určte najväčší počet kráľov, ktorých môžeme umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali. [Šachovnicu rozdelíme na 16 štvorcov 2×2, na každý z nich môžeme umiestniť nanajvýš jedného kráľa, preto je kráľov nanajvýš 16. Šestnásť kráľov už na šachovnicu umiestniť vieme, napríklad na tie políčka, ktorých obe súradnice sú nepárne.]

N4. Určte najväčší počet kráľov, ktorých môžeme umiestniť na šachovnicu 9×9 tak, aby sa navzájom neohrozovali. [Keď pridáme jeden riadok a jeden stĺpec šachovnice, dostaneme šachovnicu 10×10, na ktorú môžeme podľa podobnej úvahy ako v riešení N3 umiestniť nanajvýš 25 kráľov. A tých vieme umiestniť, napríklad na políčka, ktorých obe súradnice sú nepárne.]

D1. Nájdite najväčšie prirodzené číslo k, pre ktoré možno na šachovnicu 8×8 rozmiestniť k veží a $k + 14$ navzájom sa neohrozujúcich strelcov. [$k = 18$. Celú šachovnicu možno rozložiť na sedem bielych diagonál dĺžok 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 a sedem čiernych diagonál takých istých dĺžok. Ak sa na ľubovoľnej z týchto 14 diagonál D nachádza k_D veží, je na nej nanajvýš $k_D + 1$ navzájom sa neohrozujúcich strelcov. Podľa zadania je však celkový počet strelcov o 14 väčší ako celkový počet veží, preto na každej uvažovanej diagonále D musí byť práve $k_D + 1$ strelcov. To je pre diagonály D dĺžok 2, 4, 6, 8 možné, iba ak zodpovedajúce k_D neprevyšuje postupne hodnoty 0, 1, 2, 3. Preto počet k veží na celej šachovnici neprevyšuje hodnotu $2(0+1+2+3+2+1+0) = 18$. Hodnota $k = 18$ je pritom možná, ako ukazuje príklad rozmiestnenia 9 veží a $9 + 7 = 16$ strelcov na bielych políčkach podľa obrázka; rozmiestnenie rovnakých počtov veží a strelcov na čiernych políčkach urobíme analogicky.]



D2. Každý vrchol pravidelného devätnásťuholníka je ofarbený jednou zo šiestich farieb. Dokážte, že niektorý tupouhlý trojuholník má všetky vrcholy ofarbené rovnakou farbou. [62-C-S-3]

D3. Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. [58-B-I-4]

D4. Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď tvaru L-tetromina. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí.

   a) Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode.

   b) Zdôvodnite, prečo žiadnych sedem otázok takú istotu nedáva. [58-B-II-2]

D5. Na niektoré políčko šachovnice 6×6 postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz. [65-A-III-6]

D6. Políčka tabuľky $n \times n$, kde $n \geqq 3$, sú striedavo čierne a biele ako na obyčajnej šachovnici, pričom políčko v ľavom hornom rohu je čierne. Biele políčka budeme farbiť načierno nasledujúcim postupom. V jednom kroku vyberieme ľubovoľný obdĺžnik 2×3 alebo

3×2, v ktorom sú ešte tri biele políčka, a tieto tri políčka začiernime. Pre ktoré n môžeme po určitom počte krokov začierniť celú tabuľku? [ČR-57-A-II-3]

D7. Zistite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platia jednotlivé tvrdenia a), b) a c): Ak obsadíme figúrkami ľubovoľných k polí šachovnice 8×8, budú obsadené niektoré a) tri susedné polia niektorého riadku, b) tri susedné polia niektorého šikmého radu, c) štyri susedné polia niektorého riadku alebo stĺpca. [49-C-I-3]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019