---

1. *Pre kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí*

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokážte, že potom nutne platí $a > c > d > b$. (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Najskôr si uvedomme, že stačí dokázať $a > c$, čo v spojení s predpokladom $ab < cd$ povedie k nerovnostiam $cd > ab > bc$, odkiaľ po vydelení krajných súčinov číslom c vyjde $d > b$, a teda celkovo $a > c > d > b$.

Za týmto účelom nerovnosť pre súčty prepíšeme na tvar $b > c + d - a$ a s využitím nerovnosti pre súčiny tak získame

$$cd > ab > a(c + d - a) = ac + ad - a^2.$$

Získanú nerovnosť medzi krajnými výrazmi ľahko upravíme na súčinový tvar

$$(a - c)(a - d) > 0.$$

Na dokončenie dôkazu nerovnosti $a > c$ nám tak ostáva vylúčiť súčasnú platnosť nerovností $a < c$ a $a < d$. V takom prípade by však vďaka nerovnosti $b < a$ platilo $b < c$ a $b < d$, čím by sme dostali spor s nerovnosťou $a + b > c + d$.

Iné riešenie. Nerovnosť $a > c$ možno ukázať aj nasledovne. K dvojici (a, b) určíme dvojicu (x, δ) kladných čísel takú, že $a = x + \delta$, $b = x - \delta$, teda $x = \frac{1}{2}(a + b)$ a $\delta = \frac{1}{2}(a - b)$. Podobne určíme kladné y, ε tak, že $c = y + \varepsilon$, $d = y - \varepsilon$. Vzťahy zo zadania potom prepíšeme ako

$$x > y, \qquad x^2 - \delta^2 < y^2 - \varepsilon^2$$

a ich kombináciou získame

$$\delta^2 - \varepsilon^2 > x^2 - y^2 > 0,$$

teda $\delta > \varepsilon$. Napokon tak máme

$$a = x + \delta > y + \varepsilon = c.$$

Sme hotoví.

Poznámka. Ukážeme, že rozhodujúcu nerovnosť $a > c$ môžeme práve opísaným postupom odvodiť bez toho, aby sme zavádzali nejaké substitúcie. Zo zadania úlohy vyplývajú nerovnosti

$$(a + b)^2 > (c + d)^2 \quad \text{a} \quad -4ab > -4cd,$$

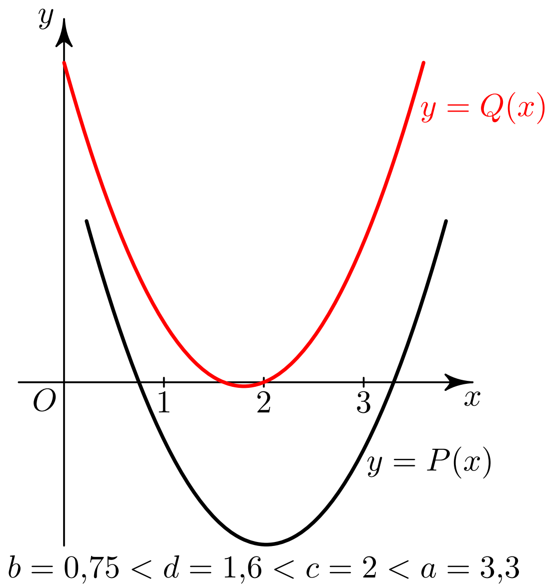
ktorých sčítaním dostaneme $(a-b)^2 > (c-d)^2$. Keďže základy oboch posledných mocnín sú kladné, vyplýva z toho nerovnosť $a - b > c - d$. Jej sčítaním s nerovnosťou $a + b > c + d$ a následným vydelením dvoma už dostaneme potrebný záver $a > c$.

Iné riešenie. Zadané nerovnosti využijeme na porovnanie dvoch kvadratických trojčlenov. Označme $P(x) = (x - a)(x - b)$ a $Q(x) = (x - c)(x - d)$. Potom pre ľubovoľné $x > 0$ platí

$$P(x) = x^2 - (a + b)x + ab < x^2 - (c + d)x + cd = Q(x).$$

Keďže pre kladné x, ktoré neležia v intervale (b, a), platí $P(x) \geqq 0$, platí tiež $Q(x) > P(x) \geqq 0$, žiadne také x preto nemôže byť koreňom trojčlena $Q(x)$. Kladné korene c, d tohto trojčlena tak musia ležať vnútri intervalu (b, a). Z toho už vyplývajú dokazované nerovnosti $a > c > d > b$.

Pre názornosť uvádzame aj grafické znázornenie situácie (obr. 1).



Obr. 1

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Súčet kladných čísel a, b je nanajvýš 16. Aká je najväčšia možná hodnota ich súčinu? [64. Do súčinu ab dosaďte vyjadrenie $a = p + \varepsilon$ a $b = p - \varepsilon$, pričom $p \leqq 8$ je aritmetický priemer čísel a a b.]

N2. Súčin kladných čísel a, b je aspoň 16. Aká je najmenšia možná hodnota ich súčtu? [8. Použite rovnaké vyjadrenie čísel a, b ako v N1 a dokážte, že z $ab \geqq 16$ vyplýva $p \geqq 4$.]

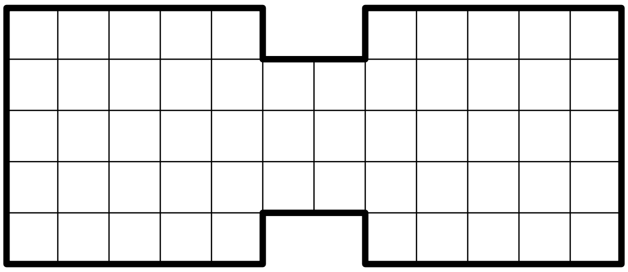
D1. Reálne čísla a_1, a_2, b_1, b_2 spĺňajú $a_1 > a_2$ a $b_1 > b_2$. Dokážte, že $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$. [Dokazovanú nerovnosť ekvivalentne upravte na $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0$.]

D2. [Permutačná nerovnosť] Nech $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ sú reálne čísla a nech $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je nejaké poradie pevne daných navzájom rôznych reálnych čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Potom je výraz

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

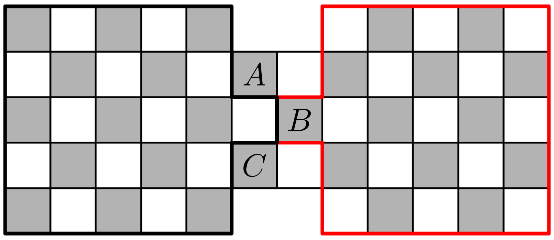
maximálny práve vtedy, keď je $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$. Dokážte. [Stačí ukázať, že usporiadania, ktoré nespĺňajú $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$, možno vylepšiť „prehodením“ jednej dvojice. To rieši úloha D1, ktorá je vlastne úlohou D2 pre $n = 2$.]

2. *Dokážte, že počet možností, ako sa dá útvar na obr. 2 vydláždiť dominovými kockami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kocka pokrýva vždy dve políčka susediace stranou.)* (*Josef Tkadlec*)



Obr. 2

Riešenie. Políčka daného útvaru šachovnicovo ofarbíme. O útvare U pozostávajúcom z ľavého štvorca 5×5 spolu s jedným políčkom navyše (ako na obr. 3) ukážeme, že je nutne tiež bezo zvyšku (a bez prekrývania) vydláždený.



Obr. 3

Označme V útvar, ktorý pokrývajú tie dominové kocky, ktoré zasahujú do útvaru U. Keďže dominová kocka zakryje jedno biele a jedno čierne políčko, má útvar V rovnaký počet čiernych a bielych políčok. To isté však platí aj pre útvar U, ako ľahko overíme. Keďže V však môže oproti U obsahovať navyše iba tie tri políčka susediace s U (na obr. 3 označené A, B, C), ktoré sú všetky čierne, nie je iná možnosť, ako že $U = V$. Naozaj tak platí, že každé dláždenie celého útvaru obsahuje ako svoju časť dláždenie útvaru U.

Podobne môžeme argumentovať pre súmerne združený útvar U' na pravej strane. Nakoniec si stačí uvedomiť, že každé dláždenie celého útvaru je jednoznačne určené tým, ako sú vydláždené útvary U a U'. (Vzhľadom na úplné vydláždenie útvaru $U \cup U'$ je už jednoznačne určená poloha dvoch dominových kociek, ktoré pokrývajú zvyšok daného útvaru s políčkami A a C.)

Ak označíme n počet dláždení útvaru U, bude celkový počet možností, ako vydláždiť zadaný útvar, rovný n^2. Tým sme ukázali, že hľadaný počet spôsobov je rovný druhej mocnine prirodzeného čísla.

Poznámka. Pre zaujímavosť uvádzame, že presný počet dláždení sa dá spočítať s pomocou počítača. Výsledok je $36\,864 = 192^2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

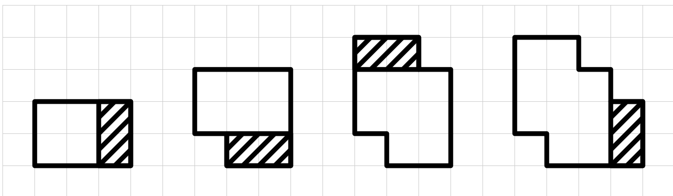
N1. Dokážte, že počet spôsobov, ako možno na šachovnici 8×8 umiestniť maximálny počet strelcov tak, aby sa žiadni dvaja navzájom neohrozovali, je druhá mocnina prirodzeného čísla. [Nepočítajte, iba rozdeľte na dve podúlohy – rozmiestnenia strelcov na čierne a na biele políčka sú navzájom nezávislé.]

N2. Koľkými spôsobmi možno vydláždiť dominovými kockami šachovnicu 8×8, z ktorej sú odrezané dve protiľahlé rohové políčka? [Nedá sa žiadnym spôsobom: ak sú odrezané políčka biele, je nutné pokryť 30 bielych a 32 čiernych políčok, pritom ľubovoľne umiestnená kocka domina pokryje vždy 1 biele a 1 čierne políčko.]

D1. Koľkými spôsobmi možno pokryť dominovými kockami obdĺžnik 2×10? [Postupujte indukciou pre obdĺžniky $2 \times n$. Nájdete tak súvislosť s Fibonacciho číslami v podobe rovností $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$, pričom $p(n)$ označuje počet možných vydláždení obdĺžnika $2 \times n$. Výsledok je 89.]

D2. Majme šachovnicu 8×8 a ku každej „hrane“, ktorá oddeľuje dve jej políčka, napíšme prirodzené číslo, ktoré udáva počet spôsobov, ako možno celú šachovnicu rozrezať na obdĺžničky 2×1 tak, aby dotyčná hrana bola súčasťou rezu. Určte poslednú cifru súčtu všetkých takto napísaných čísel. [63-A-III-3. Aký je príspevok jedného vydláždenia do celkového súčtu?]

D3. Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje útvar, ktorý možno kockami domina vydláždiť presne n spôsobmi. [Postupujte indukciou. Stačí vhodne „prilepovať“ stále rovnaký kus. (obr. 4)]



Obr. 4

---

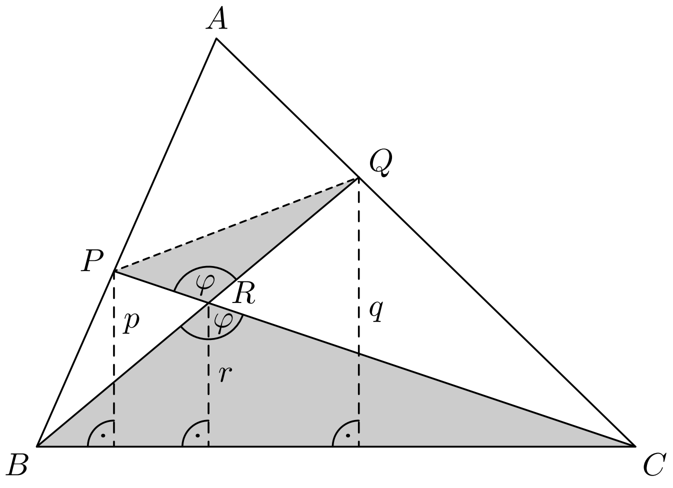
3. *Vnútri strán AB a AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body P a Q. Označme R priesečník priamok BQ a CP a p, q, r postupne vzdialenosti bodov P, Q, R od priamky BC. Dokážte, že platí*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Dokazovanú nerovnosť budeme v priebehu riešenia ekvivalentne upravovať. Začneme úpravou na tvar

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q} > 1. \tag{1}$$



Obr. 5

Vďaka zrejmej podobnosti pravouhlých trojuholníkov (obr. 5) platí

$$\frac{r}{p} = \frac{|CR|}{|CP|} = \frac{|CR|}{|CR| + |PR|}$$

a podobne aj

$$\frac{r}{q} = \frac{|BR|}{|BQ|} = \frac{|BR|}{|BR| + |RQ|}.$$

Nerovnosť (1) tak prepíšeme ako

$$\frac{|CR|}{|CR| + |PR|} + \frac{|BR|}{|BR| + |RQ|} > 1,$$

čo možno ďalej (ekvivalentne) upraviť roznásobením a odčítaním zhodných členov na tvar

$$|BR| \cdot |CR| > |RQ| \cdot |PR|. \tag{2}$$

Súčiny na oboch stranách nerovnosti (2) nám pripomenú známy vzorec na výpočet obsahu trojuholníka $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Preto vynásobíme obe strany nerovnosti (2) kladným číslom $\frac{1}{2}\sin\varphi$, pričom φ je spoločná veľkosť uhlov BRC a QRP. Výsledná nerovnosť

$$\frac{1}{2}\sin\varphi \cdot |BR| \cdot |CR| > \frac{1}{2}\sin\varphi \cdot |RQ| \cdot |PR|$$

potom platí práve vtedy, keď $S_{BRC} > S_{PRQ}$.

Poslednú nerovnosť už dokážeme ľahko. Keďže bod C má väčšiu vzdialenosť od priamky BP ako bod Q, platí $S_{BPC} > S_{BPQ}$. Po odčítaní obsahu trojuholníka BPR od oboch strán už získame želané $S_{BRC} > S_{PRQ}$, a dôkaz je tak na konci.

Iné riešenie. V tomto riešení budeme pracovať s pomermi obsahov. Ak označíme $S_1 = S_{BRC}$, $S_2 = S_{CRQ}$, $S_3 = S_{PRQ}$, $S_4 = S_{BRP}$, môžeme dĺžky p, q, r vyjadriť ako

$$r = \frac{2S_1}{|BC|}, \quad q = \frac{2(S_1 + S_2)}{|BC|}, \quad p = \frac{2(S_1 + S_4)}{|BC|}$$

a následne prepísať dokazovanú nerovnosť na tvar

$$\frac{1}{S_1+S_4}+\frac{1}{S_1+S_2}>\frac{1}{S_1},$$

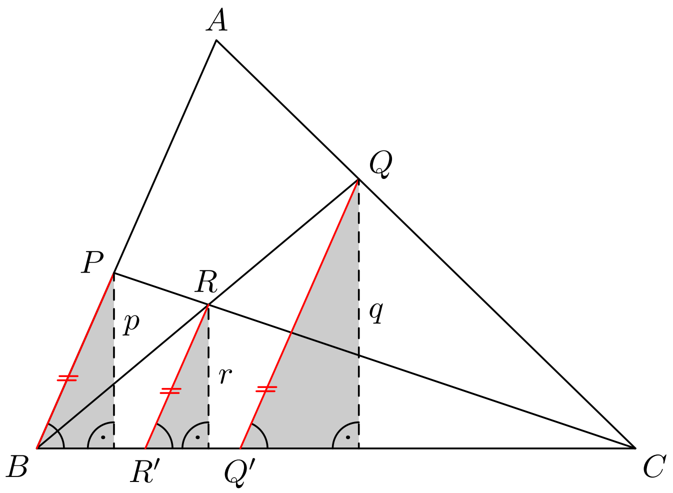
z ktorého po prevedení ekvivalentných úprav dostaneme

$$S_1^2>S_2S_4. \tag{3}$$

Keďže zároveň pre obsahy S_1, S_2, S_3, S_4 platí známy vzťah $S_1S_3 = S_2S_4$ (pozri úlohu N1), môžeme pravú stranu (3) nahradiť výrazom S_1S_3, a po krátení nenulovým obsahom S_1 tak získame ekvivalentnú nerovnosť $S_1 > S_3$, čiže $S_{BRC} > S_{PRQ}$. Tú dokážeme rovnako ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Bodmi R a Q vedieme rovnobežky so stranou AB a ich priesečníky s BC označíme postupne R' a Q'. Vďaka rovnosti uhlov $|\measuredangle CQ'Q| = |\measuredangle CR'R| = |\measuredangle CBA| = \beta$ a vzniknutým pravouhlým trojuholníkom (obr. 6) môžeme písať

$$p=|BP|\sin\beta,\qquad r=|RR'|\sin\beta,\qquad q=|QQ'|\sin\beta.$$



Obr. 6

Po dosadení do dokazovanej nerovnosti a vynásobení oboch strán kladnou hodnotou $|RR'|\sin\beta$ získame ekvivalentnú nerovnosť

$$\frac{|RR'|}{|BP|}+\frac{|RR'|}{|QQ'|}>1.$$

Z podobností $\triangle CBP \sim \triangle CR'R$ (uu) a $\triangle BQ'Q \sim \triangle BR'R$ (uu) dostaneme

$$\frac{|RR'|}{|BP|}=\frac{|CR'|}{|BC|}\quad \text{a}\quad \frac{|RR'|}{|QQ'|}=\frac{|BR'|}{|BQ'|}.$$

A keďže Q' leží vnútri úsečky BC, platí $|BQ'| < |BC|$, takže

$$\frac{|RR'|}{|BP|} + \frac{|RR'|}{|QQ'|} = \frac{|CR'|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|} > \frac{|CR'|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BC|} = 1,$$

čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Postup z posledného riešenia so zavedenými bodmi R' a Q' možno obmeniť tak, že namiesto dokazovanej nerovnosti odvodíme jej spresnenie v podobe rovnosti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{v},$$

pričom v označuje vzdialenosť bodu A od priamky BC. Za tým účelom rovnosť po vynásobení hodnotou r prepíšeme na tvar

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q}\left(1 - \frac{q}{v}\right) = 1$$

a výraz na ľavej strane upravíme použitím výšok podobných trojuholníkov takto:

$$\begin{aligned}\frac{r}{p} + \frac{r}{q}\left(1 - \frac{q}{v}\right) &= \frac{|R'C|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|}\left(1 - \frac{|Q'C|}{|BC|}\right) = \\ &= \frac{|R'C|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|} \cdot \frac{|BC| - |Q'C|}{|BC|} = \\ &= \frac{|R'C|}{|BC|} + \frac{|BR'|}{|BQ'|} \cdot \frac{|BQ'|}{|BC|} = \frac{|R'C| + |BR'|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BC|} = 1.\end{aligned}$$

Iné riešenie. Ešte iným spôsobom dokážeme rovnosť

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{v}$$

z poznámky k predošlému riešeniu. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $S_{ABC} = 1$. Označme $S_{BRC} = x$, $S_{ARC} = y$ a $S_{ABR} = z$, čiže $x + y + z = 1$. Potom platí

$$\frac{v}{p} = \frac{|AB|}{|PB|} = 1 + \frac{|AP|}{|PB|} = 1 + \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = 1 + \frac{y}{x}$$

(použili sme výsledok doplňajúcej úlohy D2). Analogicky odvodíme rovnosť

$$\frac{v}{q} = 1 + \frac{z}{x}.$$

Navyše zrejme platí

$$\frac{v}{r} = \frac{S_{ABC}}{S_{BRC}} = \frac{1}{x}.$$

Spolu teda máme

$$\frac{v}{p} + \frac{v}{q} - \frac{v}{r} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{z}{x}\right) - \frac{1}{x} = \frac{x + y + x + z - 1}{x} = 1,$$

čo je ekvivalentné dokazovanej rovnosti.

Dodajme, že čísla x, y, z tvoria trojicu takzvaných barycentrických súradníc bodu R v rovine ABC. Riešenie je elementárnym prepisom úvah, ktoré sú pri ich používaní bežné.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Dokážte, že platí

$$S_{APB} \cdot S_{CPD} = S_{BPC} \cdot S_{DPA}.$$

[Vyjadrite obsahy všetkých štyroch trojuholníkov pomocou takých základní, ktoré ležia na jednej uhlopriečke štvoruholníka $ABCD$.]

N2. Dokážte, že v konfigurácii zo zadania úlohy platí $S_{BRC} > S_{PRQ}$. [Porovnajte obsahy trojuholníkov BCP a BQP.]

D1. Body P a Q ležia v tej istej polrovine určenej priamkou l. Ich kolmé priemety na priamku l označme ako P' a Q' a priesečník priamok PQ' a $P'Q$ ako R. Dokážte, že pre vzdialenosti p, q, r bodov P, Q, R od priamky l platí

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

[Uvažujte o vhodných dvojiciach podobných trojuholníkov, ktoré sú určené zadanými bodmi a ich kolmými priemetmi na priamku l.]

D2. Daný je bod X vnútri trojuholníka ABC. Dokážte, že ak označíme D priesečník priamok AX a BC, platí

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

[Nakreslite priamku AX vodorovne. Potom vynikne, že oba zlomky sa rovnajú podielu vzdialeností bodov B a C od priamky AX.]

D3. [Cevova veta (časť)] Na stranách BC, CA a AB trojuholníka ABC sú postupne zvolené body D, E a F tak, že sa priamky AD, BE a CF pretínajú v jednom bode. Dokážte, že potom platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

[Využite trikrát výsledok úlohy D2.]

---

4. *Hovoríme, že podmnožina P množiny $M = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$ je polovičatá, ak obsahuje 21 prvkov a každé zo 42 čísel v množinách P a $Q = \{7x;\, x \in P\}$ dáva po delení číslom 43 iný zvyšok. Určte počet polovičatých podmnožín množiny M.*

(Josef Tkadlec)

Riešenie. So všetkými číslami budeme počítať ako so zvyškovými triedami po delení prvočíslom 43.

Najskôr si uvedomíme, že množiny P a Q tvoria disjunktný rozklad množiny M. Nech P je polovičatá množina a nech $x \in P$, pre ktoré potom $7x \in Q$.

Ukážeme, že $7^2x \in P$. Ak naopak predpokladáme, že $7^2x \in Q$, tak existuje $y \in P$ také, že $7^2x = 7y$. Podľa návodnej úlohy N2 je také y určené jednoznačne, a teda je ním $7x$. Keďže $7x \notin P$, dostávame potrebný spor.

Potom samozrejme $7^3x \in Q$ a zopakovaním predošlého argumentu ukážeme, že $7^4x \in P$, a následne aj $7^5x \in Q$. V princípe by sme takto mohli pokračovať aj ďalej, no už $7^6x \equiv 49^3x \equiv 6^3x \equiv x \pmod{43}$, čím sa „cyklus“ uzavrie. Cyklická šestica (rôznych) čísel $(x, 7x, 7^2x, 7^3x, 7^4x, 7^5x)$ má tak zaradenie (P, Q, P, Q, P, Q).

Množinu M teraz rozdelíme do siedmich takých cyklických šestíc ako

$$(1, 7, 6, 42, 36, 37), \quad (2, 14, 12, 41, 29, 31), \quad (3, 21, 18, 40, 22, 25),$$
$$(4, 28, 24, 39, 15, 19), \quad (5, 35, 30, 38, 8, 13), \quad (9, 20, 11, 34, 23, 32),$$
$$(10, 27, 17, 33, 16, 26).$$

Každá z týchto šestíc bude mať zaradenie buď (P, Q, P, Q, P, Q), alebo (Q, P, Q, P, Q, P), pričom každá taká voľba určí množiny P a Q vyhovujúce podmienkam úlohy. Počet možností je preto $2^7 = 128$.

Poznámka. V skutočnosti nie je nutné sedem cyklických šestíc nájsť priamo. Stačí iba dokázať *existenciu* takého rozkladu množiny M. Tá vyplýva z dvoch jednoduchších tvrdení:

(i) Každý prvok M je prvkom nejakej šestice.

(ii) Ak majú dve šestice spoločný jeden prvok, potom už majú spoločné všetky prvky.

Platnosť prvého tvrdenia je okamžitá a na dôkaz druhého si stačí uvedomiť, že podľa konštrukcie sú šestice uzavreté na násobenie číslom 7, a jeden spoločný prvok tak „vygeneruje“ postupným násobením siedmimi päť ďalších spoločných prvkov.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dané je prvočíslo p, množina $U = \{0, 1, \dots, p-1\}$ a prirodzené číslo a nesúdeliteľné s p. Dokážte, že žiadne dve čísla z množiny $V = \{0a, 1a, \dots, (p-1)a\}$ nedávajú rovnaký zvyšok po delení prvočíslom p. [Predpokladajte opak a ku sporu doveďte fakt, že p delí rozdiel nejakých dvoch čísel z množiny V.]

N2. [„Sedemnásobok je jednoznačný“] Pri označení z úlohy dokážte, že pre každé $x \in M$ existuje práve jedno $y \in M$ také, že $x \equiv 7y \pmod{43}$ (čítajte ako „x dáva rovnaký zvyšok ako $7y$ po delení 43“). [Podľa N1 pre $p = 43$ a $a = 7$ sa medzi násobkami 7 všetkých nenulových zvyškov objaví každý nenulový zvyšok práve raz, teda aj vopred zvolený zvyšok x.]

N3. Aké zvyšky dávajú mocniny siedmich po delení 43? Ak je $1 \in P$, čo možno povedať o príslušnosti týchto zvyškov do množín P a Q zo zadania úlohy? [1, 7, 6, 42, 36, 37. Ďalej si rozmyslite, prečo v prípade $1 \in P$ je už príslušnosť ostatných piatich určených zvyškov do množín P a Q určená jednoznačne: $6, 36 \in P$ a $7, 42, 37 \in Q$.]

D1. Dané je prvočíslo p, množina $U = \{1, \dots, p-1\}$ a jej prvok a. Dokážte, že potom existuje práve jeden prvok $b \in U$ taký, že ab dáva zvyšok 1 po delení p. [Podľa N1 je medzi „násobkami“ čísla a zastúpený každý možný zvyšok po delení p práve raz. Teda aj zvyšok 1.]

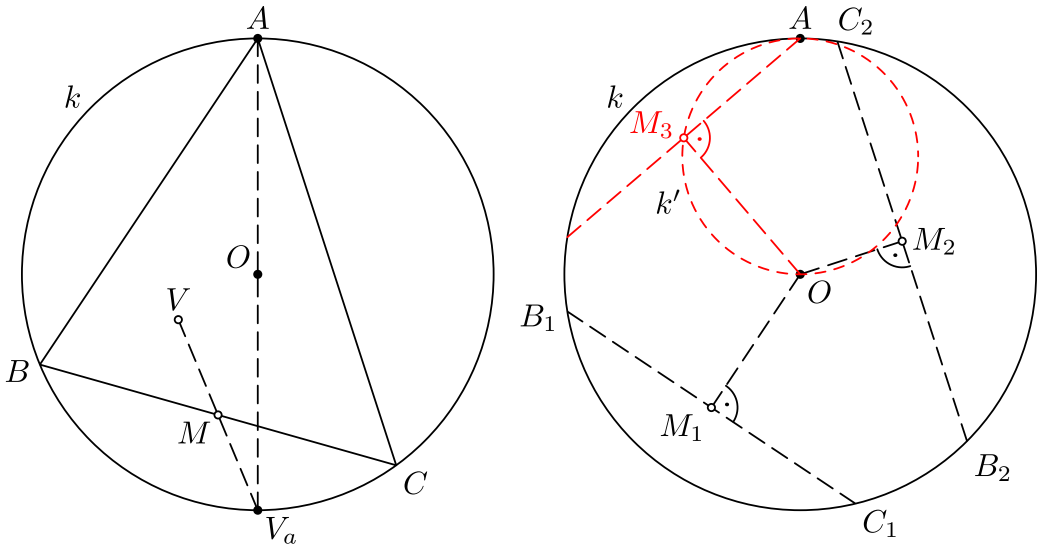
D2. [Malá Fermatova veta] Dané je prvočíslo p a prirodzené číslo a nesúdeliteľné s p. Dokážte, že potom $p \mid a^{p-1} - 1$. [Podľa N1 sú množiny U a V (po redukcii na zvyšky po delení p) zhodné. Rovnať sa tak musia aj súčiny ich nenulových prvkov. Čo vyjde?]

D3. [Wilsonova veta]. Dokážte, že pre každé prvočíslo p platí $p \mid (p-1)! + 1$. [Tvrdenie je triviálne pre $p \in \{2, 3\}$. V prípade $p \geqq 5$ zo súčinu vyškrtneme všetky dvojice činiteľov, ktorých súčin dáva po delení p zvyšok 1. Ktoré dve čísla zvýšia (lebo tvoria takú dvojicu sami so sebou)?]

---

5. *V rovine sú dané dva rôzne body O a A. Určte množinu ortocentier všetkých trojuholníkov ABC, pre ktoré je bod O stredom kružnice opísanej.* (Pavel Šalom)

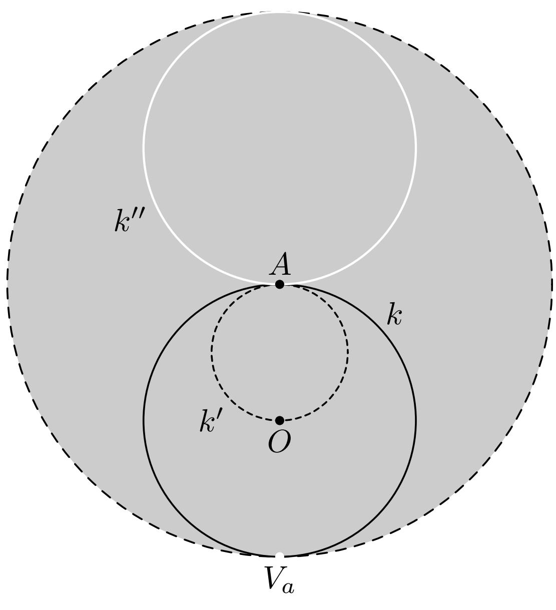
Riešenie. Najskôr si uvedomme, že všetky uvažované trojuholníky ABC majú spoločnú kružnicu opísanú $k(O, |OA|)$. Jej priemer s krajným bodom A má, ako je známe, za druhý krajný bod obraz V_a ortocentra V trojuholníka ABC v súmernosti podľa stredu M strany BC (pozri návodné úlohy N1-N3 a obr. 7 vľavo). Tento bod $V_a \in k$ je teda takisto všetkým uvažovaným trojuholníkom ABC spoločný.



Obr. 7

Z predchádzajúceho vyplýva, že hľadaná množina všetkých ortocentier V je obrazom množiny stredov M všetkých tetív BC kružnice k ($B \neq A$, $C \neq A$) v rovnoľahlosti $\mathcal{H}(V_a, 2)$, lebo tri rôzne body jednej kružnice vždy určujú trojuholník. Stačí teda určiť množinu všetkých opísaných stredov M, o ktorých vopred vieme, že všetky ležia vo vnútri kružnice k.

Je jasné, že stred O do tejto množiny patrí. Pre ostatné body M vnútra danej kružnice k platí, že sú stredom jej vhodnej tetivy, ktorá je bodom M určená jednoznačne (podľa klasickej konštrukcie – stačí pretnúť kolmicu na OM vedenú bodom M s kružnicou k, tri príklady sú vykreslené na obr. 7 vpravo). Táto konštrukcia pritom zlyhá (t. j. nedostaneme *trojuholník* ABC) práve vtedy, keď je jedným z krajných bodov zostrojenej tetivy bod A. To sa stane práve pre body M ležiace na obraze k' kružnice k v rovnoľahlosti $\mathcal{H}(A, \frac{1}{2})$ s výnimkou bodu O, ktorý bol vyšetrený zvlášť (a ku ktorému naopak existuje nekonečne veľa vhodných tetív).



Obr. 8

Určili sme tak množinu všetkých bodov M, ktorou je vnútro kružnice k, z ktorého je odobraná kružnica k' s výnimkou bodu O. Hľadaná množina ortocentier je, ako vieme, obrazom tejto množiny v rovnoľahlosti $\mathcal{H}(V_a, 2)$. Keďže obrazom kružnice k je kružnica so stredom A a polomerom $|AV_a|$, zatiaľ čo obrazom kružnice k' je kružnica k'', ktorá je súčasne obrazom kružnice k v súmernosti podľa stredu A, a napokon obrazom bodu O v danej rovnoľahlosti je bod A, je hľadaná množina (vrátane konštrukcie) určená a znázornená na obr. 8. Je ňou vnútro kružnice so stredom A a polomerom $|AV_a|$, z ktorého je odobraná kružnica k'' a do ktorého je naopak vrátený bod A.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Dokážte, že $|\measuredangle BVC| = 180° - |\measuredangle BAC|$. [Nezabudnite na prípad, keď je trojuholník ABC tupouhlý.]

N2. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Dokážte, že obraz V' bodu V v súmernosti podľa priamky BC padne na kružnicu opísanú trojuholníku ABC. Dokážte, že to isté platí aj pre obraz V'' bodu V v súmernosti podľa stredu úsečky BC. [V oboch dôkazoch využite výsledok úlohy N1.]

N3. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Z úlohy N2 vieme, že obraz V'' bodu V v stredovej súmernosti podľa stredu strany BC leží na kružnici opísanej. Dokážte navyše, že AV'' je priemerom tejto kružnice. [Vďaka stredovej súmernosti platí $CV \parallel BV''$, a preto z $CV \perp AB$ vyplýva $BV'' \perp AB$.]

N4. Daná je kružnica k so stredom S a vnútri nej bod X. Určte množinu stredov všetkých tetív kružnice k, ktoré prechádzajú bodom X. [V prípade $X = S$ sa jedná o množinu $\{S\}$, v prípade $X \neq S$ o Tálesovu kružnicu nad priemerom XS.]

N5. Daná je kružnica k so stredom S a vnútri nej bod X. Určte množinu bodov, ktoré sú stredom nejakej jej tetivy, ktorá neobsahuje bod X. [Na konštrukciu tetivy s daným stredom využite fakt, že os každej tetivy prechádza stredom kružnice. Kedy však táto konštrukcia vedie k tetive, ktorá bodom X prechádza? Hľadanou množinou je vnútro kružnice k, a to v prípade $X = S$ s výnimkou jediného bodu S, v prípade $X \neq S$ sú vylúčené všetky body Tálesovej kružnice nad priemerom XS okrem bodu S (ktorý tentoraz do výslednej množiny naopak patrí).]

D1. [Feuerbachova kružnica] Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V a stredom O kružnice opísanej. Dokážte, že stredy jeho strán, stredy spojníc vrcholov s jeho ortocentrom a päty jeho výšok ležia na jednej kružnici, ktorej stred je navyše stredom úsečky VO. [Využite výsledok úlohy N2 a použite rovnoľahlosť $\mathcal{H}(V, \frac{1}{2})$.]

D2. V rovine ω sú dané dva rôzne body O a T. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode T a stred opísanej kružnice v bode O. [58-A-III-6]

---

6. *Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin*

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

je rovný mocnine niektorého prvočísla. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Hľadané trojice majú spĺňať rovnosť

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = p^n, \tag{1}$$

pričom p je vhodné prvočíslo a n je celé číslo, ktoré je aspoň 3, lebo každý z činiteľov na ľavej strane (1) je väčší ako 1.

Keby všetky tri čísla a, b, c boli násobkami prvočísla p, spĺňala by trojica prirodzených čísel $(a/p, b/p, c/p)$ vďaka (1) podobnú rovnosť

$$\left(\frac{a}{p} + 2\frac{b}{p}\right)\left(\frac{b}{p} + 2\frac{c}{p}\right)\left(\frac{c}{p} + 2\frac{a}{p}\right) = p^{n-3},$$

takže by bola tiež riešením úlohy. Keby aj v tejto trojici boli všetky tri čísla násobkami prvočísla p, mohli by sme prejsť k riešeniu $(a/p^2, b/p^2, c/p^2)$ atď., až po konečnom počte krokov dôjdeme k záveru, že každá vyhovujúca trojica (a, b, c) je tvaru

$$a = p^k a_1,\ b = p^k b_1,\ c = p^k c_1,$$

pričom $k \geqq 0$ je celé číslo, aspoň jedno z prirodzených čísel a_1, b_1, c_1 nie je deliteľné prvočíslom p a pritom súčin troch činiteľov $a_1 + 2b_1$, $b_1 + 2c_1$, $c_1 + 2a_1$ je mocninou prvočísla p, takže je mocninou p aj každý z nich:

$$a_1 + 2b_1 = p^\alpha,\ b_1 + 2c_1 = p^\beta,\ c_1 + 2a_1 = p^\gamma. \tag{2}$$

Celočíselné exponenty α, β, γ sú pritom kladné, lebo na ľavých stranách (2) sú opäť čísla väčšie ako 1.

Ak sa pozrieme na (2) ako na sústavu troch lineárnych rovníc, ľahko určíme jej jediné riešenie

$$a_1 = \frac{p^\alpha - 2p^\beta + 4p^\gamma}{9}, \quad b_1 = \frac{p^\beta - 2p^\gamma + 4p^\alpha}{9}, \quad c_1 = \frac{p^\gamma - 2p^\alpha + 4p^\beta}{9}. \tag{3}$$

Vďaka tomu, že $\min(\alpha,\beta,\gamma) \geqq 1$, sú čitatele zlomkov v (3) násobkami prvočísla p. Keby teda neplatilo $p = 3$, boli by všetky tri čísla a_1, b_1, c_1 v rozpore s ich výberom deliteľné prvočíslom p, lebo zlomky v (3) majú menovateľ 3^2, takže ich krátenie prvočíslom p nie je možné. Nutne preto platí $p = 3$.

Vzhľadom na cyklickosť sústavy (2) môžeme predpokladať, že číslo γ je z čísel α, β, γ maximálne a že ak je v tejto trojici maximálnych čísel viac, je také okrem čísla γ aj číslo β. Platí tak

$$\text{buď} \quad \max(\alpha,\beta) < \gamma, \quad \text{alebo} \quad \alpha \leqq \beta = \gamma. \tag{4}$$

Z nerovnosti $b_1 > 0$ potom podľa (3) s dosadeným $p = 3$ máme $4 \cdot 3^\alpha > 2 \cdot 3^\gamma - 3^\beta \geqq 3^\gamma$, odkiaľ $3^{\gamma-\alpha} < 4$, čiže $\gamma - \alpha \in \{0, 1\}$. Obe možné hodnoty teraz analyzujme osobitne.

(i) V prípade $\gamma - \alpha = 0$ máme podľa (4) rovnosti $\alpha = \beta = \gamma$. Dosadením do (3) dostávame $a_1 = b_1 = c_1 = 3^{\gamma-1}$, teda $\gamma = 1$ a $(a,b,c) = (3^k, 3^k, 3^k)$.

(ii) V prípade $\gamma - \alpha = 1$ musí byť $\beta = \gamma$, inak by sme totiž podľa (4) zo vzťahov $\beta \leqq \gamma - 1$ a $\alpha = \gamma - 1$ pre hodnotu b_1 z (3) dostali

$$9b_1 = 3^\beta - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^\alpha \leqq 3^{\gamma-1} - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^{\gamma-1} = -3^{\gamma-1} < 0,$$

a to je spor. Platí preto $\beta = \gamma$, čo spolu s $\alpha = \gamma - 1$ po dosadení do (3) dáva

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3^{\gamma-1} - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^\gamma}{9} = 7 \cdot 3^{\gamma-3},\\
b_1 &= \frac{3^\gamma - 2 \cdot 3^\gamma + 4 \cdot 3^{\gamma-1}}{9} = 3^{\gamma-3},\\
c_1 &= \frac{3^\gamma - 2 \cdot 3^{\gamma-1} + 4 \cdot 3^\gamma}{9} = 13 \cdot 3^{\gamma-3},
\end{aligned}$$

teda $\gamma = 3$, $(a_1, b_1, c_1) = (7, 1, 13)$, $(a,b,c) = (7 \cdot 3^k, 3^k, 13 \cdot 3^k)$.

Odpoveď. Hľadané trojice sú $(3^k, 3^k, 3^k)$ a $(7 \cdot 3^k, 3^k, 13 \cdot 3^k)$ (až na cyklickú permutáciu), pritom k je ľubovoľné nezáporné celé číslo.

Poznámka. Keby sme v zadaní úlohy nepožadovali, aby celé čísla a, b, c boli *kladné*, existovali by mnohé ďalšie vyhovujúce trojice, napríklad $(2^k, 0, 2^{k+1})$ alebo $(11 \cdot 5^k, -5^{k+1}, 3 \cdot 5^k)$.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je súčin $(a + 2b)(b + 2a)$ mocninou niektorého prvočísla p. [$a = b = 3^k$, pričom $k \geqq 0$. Zo sústavy rovníc $a + 2b = p^u$ a $b + 2a = p^v$ vyjadrite neznáme a, b a dokážte, že ich hodnoty sú obe kladné, len keď sa prirodzené čísla u a v rovnajú – potom ale aj $a = b$.]

N2. Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin $(a+b)(b+c)(c+a)$ je rovný mocnine niektorého prvočísla. [Dokážte, že aspoň jedna zátvorka je párna, a preto $p = 2$. Pri usporiadaní $a \geqq b \geqq c$, ktoré môžeme predpokladať, bude pre tri mocniny $a + b$, $a + c$, $b + c$ čísla 2 platiť $a + b \geqq a + c \geqq b + c$. Keby $a + b$, $a + c$ boli rôzne mocniny čísla 2, bola by prvá aspoň dvojnásobkom druhej, t. j. $a + b \geqq 2(a + c)$, odkiaľ by vyplývalo $b \geqq a+2c > a$, a to je spor s $a \geqq b$. Preto musí platiť $a+b = a+c$, čiže $b = c$. To už vedie k záveru, že úlohe okrem ľahko uhádnuteľných trojíc $[2^k, 2^k, 2^k]$ vyhovujú v ľubovoľnom poradí aj trojice čísel $[2^n - 2^k, 2^k, 2^k]$, pričom $0 \leqq k < n - 1$, a že žiadne iné riešenia neexistujú.]

D1. Pre navzájom rôzne prirodzené čísla a, b, c platí, že

$$(a + b + c) \mid (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a).$$

Dokážte, že číslo $a + b + c$ je zložené. [Ak by $a + b + c$ bolo prvočíslom, delilo by jednu zo zátvoriek, povedzme $a + 2b$, a teda by delilo aj rozdiel $a + 2b - (a + b + c) = b - c$, takže by platilo $a + b + c < |b - c|$, čo je spor.]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019