65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Pre prirodzené čísla k, l, m platí*

$$\frac{k+m+klm}{lm+1}=\frac{2\,051}{404}.$$

Určte všetky možné hodnoty súčinu klm. (Aleš Kobza)

Riešenie. Aj keď rovnica v zadaní obsahuje tri neznáme, podarí sa nám ju jednoznačne vyriešiť vďaka tomu, že hľadáme riešenie iba v množine prirodzených čísel. Pokúsime sa z oboch zlomkov oddeliť ich celú časť (čo je v prípade číselného zlomku jednoduché):

$$\frac{k+m+klm}{lm+1}=\frac{k\,(1+lm)+m}{lm+1}=k+\frac{m}{lm+1},\qquad \frac{2\,051}{404}=5\,\frac{31}{404}. \tag{1}$$

Keďže $0<m<lm+1$, je

$$0<\frac{m}{lm+1}<1,$$

a preto musí byť $k=5$. Z rovností (1) tak pre zlomkové časti oboch čísel dostávame

$$\frac{m}{lm+1}=\frac{31}{404}. \tag{2}$$

Zlomok na pravej strane (2) je v základnom tvare a podobne aj zlomok na ľavej strane (čísla m a $lm+1$ sú zjavne nesúdeliteľné). Z tejto rovnosti zlomkov tak vychádza rovnosť čitateľov aj menovateľov: $m=31$ a $lm+1=404$, odkiaľ už ľahko dopočítame $l=13$. Súčin klm tak môže nadobúdať jedinú hodnotu $5\cdot13\cdot31=2\,015$.

Iné riešenie. Z predchádzajúceho riešenia využijeme úvodný postup a rovnicu (2) prepíšeme s prevrátenými zlomkami ako

$$\frac{lm+1}{m}=\frac{404}{31}.$$

Teraz zopakujeme postup zo začiatku predošlého riešenia a z oboch zlomkov oddelíme ich celú časť:

$$\frac{lm+1}{m}=l+\frac{1}{m},\qquad \frac{404}{31}=13\,\frac{1}{31}.$$

Z toho vidíme, že nutne $l=13$ a $m=31$.

Iné riešenie. Zo zadanej rovnice vyjadríme neznámu k pomocou neznámych l a m, v prvom kroku sa pritom zbavíme zlomkov vynásobením oboma menovateľmi:

$$\begin{aligned}404(k+m+klm)&=2\,051(lm+1),\\ 404k(lm+1)+404m&=2\,051(lm+1),\\ k&=\frac{2\,051(lm+1)-404m}{404(lm+1)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Zlomok na pravej strane musí byť prirodzené číslo, skúmajme teda, či oba činitele v jeho menovateli (404 aj $lm+1$) delia jeho čitateľa. Čísla $2\,051 = 5 \cdot 404 + 31$ a 404 sú nesúdeliteľné a $404m$ je zrejme deliteľné číslom 404, preto 404 musí deliť $lm+1$.

Podobne čísla $lm+1$ a m sú nesúdeliteľné, teda $lm+1$ musí v čitateli deliť číslo 404. Ak sa dve prirodzené čísla delia navzájom, musia byť rovnaké.[1] Dostávame tak rovnosť $lm+1 = 404$, ktorá po dosadení do (3) dáva

$$k = \frac{2\,051 \cdot 404 - 404m}{404 \cdot 404} = \frac{2\,051 - m}{404}. \tag{4}$$

Z rovnosti $lm+1 = 404$ však tiež vyplýva, že $m < 404$. Navyše číslo k je prirodzené, takže m môže byť iba zvyšok po delení čísla 2 051 číslom 404, t. j. $m = 31$. Spätným dosadením do (4) dostaneme $k = 5$ a z rovnice $lm + 1 = 31l + 1 = 404$ vyjde $l = 403/31 = 13$. Jediné vyhovujúce riešenie je $(k,l,m) = (5,13,31)$, a teda $klm = 2\,015$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. V prirodzených číslach vyriešte rovnicu $\frac{1}{p+1/q} = \frac{2015}{2016}$. [$p = 1$, $q = 2\,015$]

N2. Pripomeňte si dôležitý poznatok o deliteľnosti celých čísel: ak delí číslo x súčin yz a ak sú pritom čísla x a y nesúdeliteľné, tak číslo x delí samo číslo z. Využite potom toto pravidlo na zdôvodnenie takéhoto záveru: ak pre prirodzené čísla a, b, c, d sú oba zlomky $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ v základnom tvare, platí $a = c$ a $b = d$.

N3. Dokážte, že ak pre prirodzené čísla a, b, k, l platí, že ka delí b a lb delí a, tak $k = l = 1$ a $a = b$. [Deliteľ nemôže byť (v absolútnej hodnote) väčší ako delenec, preto $ka \leqq b$ a $lb \leqq a$, takže $kla \leqq lb \leqq a$, teda $kl \leqq 1$ a odtiaľ $k = l = 1$. Nakoniec spätne $a \leqq b \leqq a$, čo nastáva, len ak $a = b$.]

D1. Nájdite aspoň jedno riešenie rovnice

$$\frac{k+m+klm}{lm+1} = \frac{2051}{404}$$

v racionálnych číslach, pre ktoré je hodnota súčinu klm rovná 2 016. [Dosadením $klm = 2\,016$ a $lm = 2\,016/k$ dostaneme voľbou $k = 1$ jedno z riešení $(k,l,m) = (1, 2\,016 \cdot 404/(1\,647 \cdot 2\,017), 2\,017 \cdot 1\,647/404)$.]

---

2. *Do štvorcovej tabuľky* 11×11 *sme vpísali prirodzené čísla* $1, 2, \ldots, 121$ *postupne po riadkoch zľava doprava a zhora nadol. Štvorcovou doštičkou* 4×4 *sme všetkými možnými spôsobmi zakryli práve 16 políčok. Koľkokrát bol súčet zakrytých 16 čísel druhou mocninou celého čísla?* (*Vojtech Bálint, Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme z číslo, ktoré zakrýva ľavý horný roh doštičky. Celá doštička musí ležať vnútri danej tabuľky, preto hodnoty z môžu byť iba čísla vpísané v prvých ôsmich riadkoch a v prvých ôsmich stĺpcoch tabuľky (ak by bolo napríklad $z = 10$, doštička by prečnievala, teda by nemohla zakrývať 16 čísel tabuľky).

Prvých 8 riadkov tabuľky obsahuje čísla od 1 po 88, z nich musíme ešte vylúčiť čísla v posledných troch stĺpcoch. Všimnime si, že čísla v každom stĺpci dávajú po delení jedenástimi taký istý zvyšok. Posledné tri stĺpce zľava (= prvé tri sprava) tak obsahujú čísla, ktoré po delení jedenástimi dávajú zvyšky 9, 10 a 0; sú to čísla 9, 10, 11 (prvý riadok), 20, 21, 22 (druhý riadok), atď. až 86, 87, 88 (ôsmy riadok).

Takto pripravení môžeme vypočítať súčet čísel, ktoré doštička zakryje. Zakryté čísla sú z, $z+1$, $z+2$, $z+3$ (prvý riadok doštičky), $z+11$, $z+12$, $z+13$, $z+14$ (druhý

[1] Ak prirodzené číslo a delí prirodzené číslo b, je $a \leqq b$.

riadok doštičky), $z+22$, $z+23$, $z+24$, $z+25$ (tretí riadok doštičky) a $z+33$, $z+34$, $z+35$, $z+36$ (štvrtý riadok doštičky) a ich súčet je

$$16z + 288 = 16(z+18) = 4^2(z+18).$$

Ak je tento súčet druhou mocninou nejakého celého čísla, musí byť $z+18$ druhou mocninou nejakého celého čísla n. Už vieme, že $1 \leqq z \leqq 88$, a teda $19 \leqq z + 18 = n^2 \leqq \leqq 18 + 88 = 116$. Tým zabezpečíme, že horný ľavý roh doštičky položíme na políčko v prvých ôsmich riadkoch. Pre prirodzené číslo n, pričom $19 \leqq n^2 \leqq 116$, prichádzajú do úvahy hodnoty $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Dopočítaním hodnôt $z = n^2 - 18$ dostávame zodpovedajúce $z \in \{7, 18, 31, 46, 63, 82\}$.

Musíme ešte preveriť, či niektoré z týchto čísel neležia v posledných troch stĺpcoch tabuľky. Dopočítame preto zvyšky čísel po delení jedenástimi a zistíme, že musíme dodatočne vylúčiť hodnotu $z = 31$ so zvyškom 9.

Doštičku možno položiť požadovaným spôsobom na päť rôznych pozícií, ktoré charakterizuje číslo zakryté ľavým horným rohom doštičky, a to $z \in \{7, 18, 46, 63, 82\}$. V týchto prípadoch bude súčet čísel zakrytých políčok $16(z+18) \in \{16\cdot 25, 16\cdot 36, 16\cdot 64, 16 \cdot 81, 16 \cdot 100\}$.

Iné riešenie. Ak položíme doštičku na tabuľku tak, že ľavý horný roh doštičky zakrýva číslo 1, bude súčet zakrytých čísel

$$s = 1+2+3+4+12+13+14+15+23+24+25+26+34+35+36+37 = 304 = 16\cdot 19.$$

Aby doštička zostala ležať celá v štvorcovej tabuľke, môžeme doštičku posunúť nanajvýš o 8 stĺpcov doprava a podobne nanajvýš o 8 riadkov nadol. Pri každom posunutí doštičky doprava o jeden stĺpec sa každé zakryté číslo zväčší o 1, takže súčet čísel zakrytých doštičkou sa zvýši o 16. Podobne zvážime, čo spôsobí posun doštičky o jeden riadok nadol – vtedy sa každé zakryté číslo zväčší o 11, a súčet všetkých zakrytých políčok sa teda zväčší o $11 \cdot 16$.

Číslo s je teda deliteľné 16 a každý pohyb doštičky deliteľnosť 16 zachová, preto bude súčet čísel zakrytých doštičkou vždy deliteľný 16. Ak má byť tento súčet druhou mocninou celého čísla, bude to práve vtedy, ak bude aj jeho šestnástina druhou mocninou celého čísla (keďže $16 = 4^2$). Stačí teda uvažovať iba šestnástiny súčtov čísel zakrytých doštičkou.

Teraz vytvoríme tabuľku 8×8, do jej políčok vpíšeme šestnástiny súčtov čísel zakrytých doštičkou s ľavým horným políčkom zakrývajúcim zodpovedajúce políčko danej tabuľky. V jej ľavom hornom rohu bude číslo 19 $(= \frac{1}{16} \cdot 304)$, pri pohybe doprava zväčšíme číslo o 1 a pri pohybe nadol o 11:

19	20	21	22	23	24	**25**	26
30	31	32	33	34	35	**36**	37
41	42	43	44	45	46	47	48
52	53	54	55	56	57	58	59
63	**64**	65	66	67	68	69	70
74	75	76	77	78	79	80	**81**
85	86	87	88	89	90	91	92
96	97	98	99	**100**	101	102	103

Nakoniec stačí spočítať, koľko z týchto čísel je druhou mocninou celého čísla. Takých čísel je práve päť a sú zvýraznené polotučným písmom (25, 36, 64, 81 a 100).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Do štvorcovej tabuľky veľkosti 5×5 sme vpísali prirodzené čísla $1, 2, \dots, 25$ postupne po riadkoch zľava doprava a zhora nadol. Štvorcovou doštičkou veľkosti 2×2 sme všetkými možnými spôsobmi zakryli štyri políčka.
   1. Aký najmenší a aký najväčší súčet môžu mať štyri zakryté čísla? [16, 88]
   2. Koľkými spôsobmi môžeme takto doštičku položiť? [16]
   3. Bude súčet štyroch zakrytých čísel vždy deliteľný štyrmi? [Áno]
   4. Koľkokrát bude súčet zakrytých štyroch čísel druhou mocninou celého čísla? [3-krát]

N2. Do políčok štvorčekovej mriežky 11×11 sme postupne zľava doprava a zhora nadol zapísali čísla $1, 2, \dots, 121$. Štvorcovou doskou 3×3 sme všetkými možnými spôsobmi zakryli presne deväť políčok. V koľkých prípadoch bol súčet deviatich zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla? [62–B–S–2]

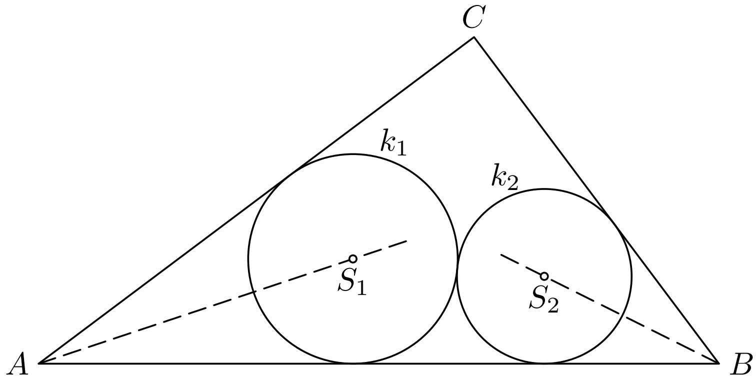
D1. V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané „$-$“ a v ostatných políčkach „$+$“. V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet. [64–C–II–2]

D2. V každom políčku tabuľky 8×8 je napísané jedno nezáporné celé číslo tak, že každé dve čísla, ktoré sú na políčkach súmerne združených podľa jednej či druhej uhlopriečky, sú rovnaké. Súčet všetkých 64 čísel je 1 000, súčet 16 čísel na uhlopriečkach je 200. Dokážte, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky je nanajvýš 300. Platí rovnaký záver aj pre číslo 299? [63–B–II–4]

---

3. *V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 3\,\mathrm{cm}$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC, zatiaľ čo k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru r_2.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Majme také dve kružnice, ktoré spĺňajú predpoklady úlohy (obr. 1). Zrejme stred S_1 leží na osi uhla BAC a stred S_2 na osi uhla ABC. Ďalej si uvedomme, že veľkosť



Obr. 1

polomeru r_1 kružnice k_1 je priamo úmerná dĺžke úsečky AS_1 a podobne veľkosť r_2 priamo úmerná dĺžke úsečky BS_2. Keď zväčšíme polomer jednej z kružníc, musí sa nutne polomer druhej kružnice zmenšiť.

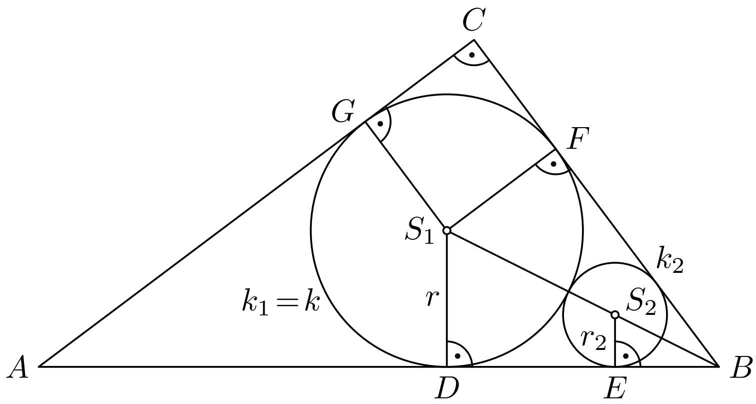
Kružnica k_2 nemôže mať polomer väčší ako najväčšia kružnica, ktorú možno do trojuholníka ABC vpísať. Takou kružnicou je zrejme kružnica k do trojuholníka ABC vpísaná. A naopak najmenší polomer bude mať kružnica k_2, ak zvolíme $k_1 = k$. (Že v oboch opísaných prípadoch pre $k_2 = k$ aj pre $k_1 = k$ existuje príslušná „vpísaná" kružnica k_1, resp. k_2, je vcelku zrejmé.)

Stačí teda vypočítať polomer r kružnice k do trojuholníka ABC vpísanej a polomer kružnice k_2, ktorá sa dotýka kružnice k a strán AB a BC daného trojuholníka.

Polomer r vpísanej kružnice vypočítame napríklad zo vzorca $2S_{ABC} = ro$, pričom S_{ABC} označuje obsah trojuholníka ABC a o jeho obvod.[2] Obsah daného pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB je pri zvyčajnom označení dĺžok strán rovný $\frac{1}{2}ab$. Prepona v trojuholníku ABC má (v centimetroch) podľa Pytagorovej vety veľkosť $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Maximálny polomer kružnice k_2 je teda

$$r = \frac{2S_{ABC}}{o} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{3 \cdot 4}{3+4+5} = 1.$$

Pre výpočet polomeru r_2 kružnice k_2, ktorá sa dotýka kružnice k a strán AB a BC, označme D a E body, v ktorých sa kružnice k a k_2 dotýkajú strany AB, a F, G dotykové body kružnice k postupne so stranami BC a AC (obr. 2). Keďže daný trojuholník je



Obr. 2

pravouhlý, je S_1FCG štvorec so stranou dĺžky $r = 1$, takže $|BF| = |BD| = 2$ a podľa Pytagorovej vety $|BS_1| = \sqrt{5}$. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BES_2 a BDS_1 potom vyplýva

$$\frac{r_2}{|BS_2|} = \frac{r}{|BS_1|}, \quad \text{čiže} \quad \frac{r_2}{\sqrt{5} - r_2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Po úprave tak pre hľadanú hodnotu neznámej r_2 dostaneme lineárnu rovnicu

$$r_2\left(\sqrt{5} + 1\right) = \sqrt{5} - 1,$$

ktorú ešte zjednodušíme vynásobením $\sqrt{5} - 1$. Zistíme tak, že najmenšia možná hodnota polomeru kružnice k_2 je rovná

$$r_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ sa navzájom zvonka dotýkajú, ich spoločnú vonkajšiu dotyčnicu označme P_1P_2, pričom $P_1 \in k_1$ a $P_2 \in k_2$. Presvedčte sa, že platí $(r_1 + r_2)^2 = |P_1P_2|^2 + (r_1 - r_2)^2$. [Rovnica je Pytagorova veta pre pravouhlý trojuholník s preponou S_1S_2.]

[2] Iný postup využívajúci pravouhlosť trojuholníka ABC je predmetom doplňajúcej úlohy.

N2. Kružnica vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka jeho strán BC, AC, AB postupne v bodoch K, L, M. Dokážte rovnosti $|AL| = |AM| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC| - |BC|)$, $|BK| = |BM| = \frac{1}{2}(|BC| + |AB| - |AC|)$ a $|CK| = |CL| = \frac{1}{2}(|AC| + |BC| - |AB|)$. [Body dotyku vpísanej kružnice so stranami rozdeľujú hranicu trojuholníka na tri dvojice úsečiek rovnakých dĺžok.]

D1. Dokážte, že v pravouhlom trojuholníku ABC s odvesnami dĺžok a, b a preponou dĺžky c je priemer vpísanej kružnice rovný $a + b - c$. [Ak sú D a E postupne body dotyku vpísanej kružnice so stredom S s odvesnami BC a AC, je $SDCE$ štvorec, takže $|CD| = \frac{1}{2}(a + b - c) = |SD| = r$.]

D2. Polomer vpísanej kružnice trojuholníka ABC je r. Zostrojme tri rôzne dotyčnice vpísanej kružnice rovnobežné so stranami trojuholníka. Polomery vpísaných kružníc troch malých „odrezaných“ trojuholníkov označme r_A, r_B, r_C podľa vrcholov trojuholníka. Dokážte, že $r_A + r_B + r_C = r$. [Z podobnosti malého trojuholníka k ABC je $r_A/r = (v_a - 2r)/v_a$, pričom v_a označuje veľkosť výšky z vrcholu A v trojuholníku ABC. Podobné rovnice platia aj pre ostatné vrcholy, takže ostáva ukázať, že $1/v_a + 1/v_b + 1/v_c = 1/r$. Tu využijeme vzorec $ro = 2S = av_a = bv_b = cv_c$, pričom $o = a + b + c$.]

---

4. *Počet všetkých párnych deliteľov niektorého prirodzeného čísla je o 3 väčší ako počet všetkých jeho nepárnych deliteľov. Aký je podiel súčtu všetkých jeho párnych deliteľov a súčtu všetkých jeho nepárnych deliteľov? Nájdite všetky možné odpovede.*

(*Erika Novotná*)

Riešenie. Označme n hľadané číslo a nech 2^k je najvyššia mocnina dvojky, ktorá číslo n delí. Ku každému nepárnemu deliteľu d čísla n (vrátane $d = 1$) môžeme priradiť práve k rôznych párnych deliteľov $2d, 2^2d, \dots, 2^kd$. Dostaneme tak všetky párne delitele čísla n; navyše rôznym nepárnym deliteľom priradíme rôzne párne delitele (keďže z rovnice $2^{k_1}d_1 = 2^{k_2}d_2$ pre prirodzené čísla k_1, k_2, d_1, d_2, pričom d_1 a d_2 sú nepárne, vyplýva, že $d_1 = d_2$ a $k_1 = k_2$). Vidíme tak, že ak má číslo n práve N nepárnych deliteľov, má práve kN deliteľov párnych.

Podľa zadania má platiť $kN = N + 3$, čiže $N(k - 1) = 3$. Číslo 1 je nepárnym deliteľom každého prirodzeného čísla, preto $N \geqq 1$. Máme teda iba dve možnosti:

1. $N = 1$ a $k - 1 = 3$.
   V tomto prípade má n jediného nepárneho deliteľa, a je teda mocninou dvojky. Navyše najvyššia mocnina, ktorá ho delí, je $2^k = 2^4 = 16$, teda $n = 16$. Párne delitele čísla 16 sú 2, 4, 8 a 16, hľadaný podiel je
$$\frac{2 + 4 + 8 + 16}{1} = 30.$$
2. $N = 3$ a $k - 1 = 1$.
   V tomto prípade má n tri nepárne delitele a najvyššia mocnina dvojky, ktorá ho delí, je $2^k = 2^2 = 4$. Pokiaľ by malo číslo n vo svojom prvočíselnom rozklade dve rôzne nepárne prvočísla p a q, malo by aspoň štyri nepárne delitele 1, p, q a pq, čo je spor. Číslo n je teda deliteľné jediným nepárnym prvočíslom p. Preto $n = 4p^\alpha$ pre vhodné $\alpha \geqq 1$, takže číslo n má celkom $\alpha + 1$ nepárnych deliteľov $1, p, p^2, \dots, p^\alpha$. Preto musí byť $\alpha = 2$. Pre $n = 4p^2$ je tak hľadaný podiel rovný
$$\frac{2 + 2p + 2p^2 + 4 + 4p + 4p^2}{1 + p + p^2} = \frac{(2 + 4)(1 + p + p^2)}{1 + p + p^2} = 6.$$

Hľadaný podiel môže byť 30 (pre $n = 16$) alebo 6 (pre $n = 4p^2$, pričom p je ľubovoľné nepárne prvočíslo).

Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení označme n hľadané prirodzené číslo a najväčšiu mocninu dvojky, ktorá ho delí, označme 2^k. Z predošlého riešenia už vieme, že všetky párne delitele čísla n môžeme rozdeliť na k-členné skupiny $2d, 2^2d, \dots, 2^kd$, pričom d je ľubovoľný nepárny deliteľ čísla n. Súčet párnych deliteľov v každej z vypísaných skupín sa dá vyjadriť ako násobok príslušného d:

$$
\begin{aligned}
2d + 2^2d + \dots + 2^kd &= (2 + 2^2 + \dots + 2^k)d = \\
&= \left(\frac{2^{k+1}-1}{2-1} - 1\right) d = (2^{k+1}-2)d.
\end{aligned}
$$

Taký istý činiteľ $2^{k+1} - 2$ dostaneme pre každý nepárny deliteľ čísla n, preto súčet všetkých párnych deliteľov čísla n je vždy $(2^{k+1} - 2)$-násobkom súčtu všetkých jeho nepárnych deliteľov.

Ostáva nájsť možné hodnoty k a napokon ukázať, že k nim existuje zodpovedajúce číslo n. Možné hodnoty k určíme rovnako ako v predošlom riešení z rovnice $N(k-1) = 3$, pričom N je počet nepárnych deliteľov čísla n. Dostávame tak $k = 2$ ($N = 3$ a hľadaný podiel je $2^3 - 2 = 6$) a $k = 4$ ($N = 1$ a hľadaný podiel je $2^5 - 2 = 30$). Pre $k = 2$ potom hľadáme násobok 4 s tromi nepárnymi deliteľmi – tomu vyhovuje napríklad $n = 4 \cdot 9 = 36$ s tromi nepárnymi deliteľmi 1, 3 a 9 – a pre $k = 4$ zrejme vyhovuje $n = 16$ s jediným nepárnym deliteľom.

Návodné a doplňajúce úlohy:

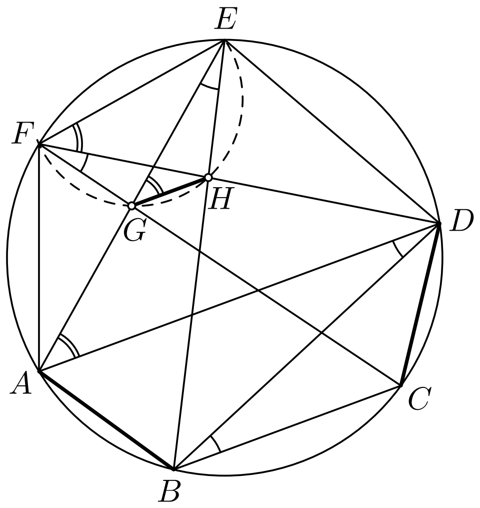
- N1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má práve tri delitele. Ako sa zmení odpoveď, ak hľadáme najmenšie trojciferné nepárne číslo s práve tromi deliteľmi? [4; 121]
- N2. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú rovnaký počet párnych aj nepárnych deliteľov. [$2m$, pričom m je ľubovoľné nepárne číslo.]
- D1. Nech m je prirodzené číslo, ktoré má 7 kladných deliteľov, a n je prirodzené číslo, ktoré má 9 kladných deliteľov. Koľko deliteľov môže mať súčin $m \cdot n$? [64–B–I–4]
- D2. Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15}. Určte n. [64–B–II–1]

---

5. *Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H. Dokážte, že úsečky GH, AD a BC sú navzájom rovnobežné.* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že $AD \parallel BC$. Keďže $|AB| = |CD|$, sú obvodové uhly nad tetivami AB a CD kružnice opísanej šesťuholníku $ABCDEF$ zhodné (obr. 3), teda $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle DBC|$; to sú však striedavé uhly priečky BD priamok AD a BC, preto $AD \parallel BC$.

Ostáva ukázať, že $GH \parallel AD$. Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami



Obr. 3

AB a CD pri vrcholoch E a F dostávame

$$|\sphericalangle GEH| = |\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle GFH|,$$

čo znamená, že body E, F, G a H ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov GEH a GFH ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou GH. Z toho vyplýva, že uhly EFH a EGH nad jej tetivou EH sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov EFD a EAD nad tetivou ED pôvodnej kružnice (obr. 3) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov EGH a EAD priečky AE priamok GH a AD, ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že tetivový lichobežník je rovnoramenný. [Osi oboch rovnobežných základní lichobežníka prechádzajú stredom opísanej kružnice, sú teda zhodné.]

N2. Dokážte, že ak dve rôznobežné protiľahlé strany tetivového štvoruholníka $ABCD$ majú rovnakú dĺžku, je štvoruholník lichobežníkom. [Ak sú zhodné strany AB a CD, uvažujme os o úsečky BC, tá prechádza stredom S opísanej kružnice. Rovnoramenné trojuholníky ABS a CDS sú zhodné, a teda súmerne združené podľa osi o.]

D1. Daná je tetiva AB kružnice k so stredom v bode S. Na úsečke AB zvoľme bod M a priesečník kružnice opísanej trojuholníku AMS s kružnicou k označme C. Dokážte, že uhly MCS a MBS sú zhodné. [Stačí využiť rovnosť uhlov v rovnoramennom trojuholníku ABS a obvodové uhly nad MS v kružnici opísanej trojuholníku AMS.]

D2. Vo vonkajšej oblasti kružnice k je daný bod A. Všetky lichobežníky, ktoré sú do kružnice k vpísané tak, že ich predĺžené ramená sa pretínajú v bode A, majú spoločný priesečník uhlopriečok. Dokážte. [47–A–III–5]

---

6. *Kladné reálne čísla a, b, c sú také, že hodnoty*

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = \frac{2a^2}{b+c}, \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a}, \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b}$$

sú navzájom rôzne. Zapíšme ich od najmenšej po najväčšiu:

$$x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < x_{i_4} < x_{i_5} < x_{i_6}.$$

Zistite, koľko rôznych poradí $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ indexov 1 až 6 môžeme dostať, keď budeme rôzne voliť čísla a, b, c. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Vzhľadom na definíciu čísel $x_1, x_2, \dots, x_6$ je zrejmé, že ľubovoľná permutácia zvolených čísel a, b, c sa prejaví jednak rovnakou permutáciou hodnôt x_1, x_2, x_3, jednak rovnakou permutáciou hodnôt x_4, x_5, x_6. Stačí teda zistiť, koľko rôznych poradí možno dostať za predpokladu $a < b < c$. Celkový počet možných poradí potom bude 6-krát väčší, keďže permutácií troch čísel a, b, c je práve $3! = 6$.

Predpokladajme preto, že $a < b < c$, čiže $x_1 < x_2 < x_3$. Z nerovností

$$x_4 = \frac{2a^2}{b+c} < \frac{2a^2}{a+a} = a \quad \text{a} \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b} > \frac{2c^2}{c+c} = c$$

vyplýva $x_4 < x_1 < x_2 < x_3 < x_6$. Ostáva rozhodnúť, medzi ktorými dvoma z posledných piatich čísel môže ležať číslo x_5, pretože to spĺňa nerovnosti

$$x_5 = \frac{2b^2}{c+a} > \frac{2a^2}{c+b} = x_4 \quad \text{a} \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a} < \frac{2c^2}{b+a} = x_6.$$

Do úvahy tak prichádzajú štyri alternatívy

$$x_4 < x_5 < x_1, \quad x_1 < x_5 < x_2, \quad x_2 < x_5 < x_3, \quad x_3 < x_5 < x_6;$$

ukážeme, že sú všetky možné.

1. Pre $(a, b, c) = (1, 2, 8)$ dostávame

$$x_4 = \tfrac{1}{5} < x_5 = \tfrac{8}{9} < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 8 < x_6 = \tfrac{128}{3} = 42\,\tfrac{2}{3}.$$

2. Pre $(a, b, c) = (1, 2, 4)$ dostávame

$$x_4 = \tfrac{1}{3} < x_1 = 1 < x_5 = \tfrac{8}{5} < x_2 = 2 < x_3 = 4 < x_6 = \tfrac{32}{3} = 10\,\tfrac{2}{3}.$$

3. Pre $(a, b, c) = (2, 6, 9)$ dostávame

$$x_4 = \tfrac{8}{15} < x_1 = 2 < x_2 = 6 < x_5 = \tfrac{72}{11} = 6\,\tfrac{6}{11} < x_3 = 9 < x_6 = \tfrac{81}{4} = 20\,\tfrac{1}{4}.$$

4. Pre $(a, b, c) = (1, 9, 12)$ dostávame

$$x_4 = \tfrac{2}{21} < x_1 = 1 < x_2 = 9 < x_3 = 12 < x_5 = \tfrac{162}{13} = 12\,\tfrac{6}{13} < x_6 = \tfrac{144}{5} = 28\,\tfrac{4}{5}.$$

Samozrejme, pre každú z uvedených možností existuje veľa iných príkladov takých trojíc $a < b < c$. Na príklade prvej trojice ešte stručne ukážeme, ako k nej možno dospieť.

Ako vieme, prvá z nerovností $x_4 < x_5 < x_1$ je splnená vždy, preto sa budeme zaoberať iba druhou nerovnosťou, ktorú po prepísaní do premenných a, b, c vyriešime vzhľadom na c:

$$\frac{2b^2}{c+a} < a, \quad \text{čiže} \quad c > \frac{2b^2}{a} - a.$$

Keď zvolíme napr. $b = 2a$, dostaneme podmienku $c > 7a$ a pre vyhovujúce $c = 8a$ potom pri voľbe $a = 1$ dostaneme práve trojicu $(a, b, c) = (1, 2, 8)$.

Odpoveď. Existuje práve 24 rôznych poradí $(i_1, i_2, \dots, i_6)$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre kladné reálne čísla $a \leqq b \leqq c$ dokážte nerovnosť $1/a \geqq 1/b \geqq 1/c$. [Prvú nerovnosť vynásobíme ab a druhú bc.]

N2. Pre kladné reálne čísla $a \leqq b \leqq c$ dokážte nerovnosť $1/a \geqq 2/(b+c)$. [Vynásobte nerovnosť výrazom $a(b+c)$ a využite nerovnosti $a \leqq b$ a $a \leqq c$.]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{a^2-ab+b^2}+\frac{bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{ca}{c^2-ca+a^2} \leqq 3.$$

Určte, kedy nastane rovnosť. [64–B–S–3]

D2. Sú dané reálne čísla a, b, c, pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že najviac dve z čísel

$$2a-\frac{1}{b}, \quad 2b-\frac{1}{c}, \quad 2c-\frac{1}{a}$$

sú väčšie ako 1. [KMS, 3. zimná séria 2012/2013, úloha 7]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Roman Soták, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015