64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *Celé čísla od 1 do 9 rozdelíme ľubovoľne na tri skupiny po troch a potom čísla v každej skupine medzi sebou vynásobíme.*

a) Určte tieto tri súčiny, ak viete, že dva z nich sa rovnajú a sú menšie ako tretí súčin.

b) Predpokladajme, že jeden z troch súčinov, ktorý označíme S, je menší ako dva ostatné súčiny (ktoré môžu byť rovnaké). Nájdite najväčšiu možnú hodnotu S.

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Najskôr vyjadríme súčin všetkých deviatich čísel pomocou jeho rozkladu na súčin prvočísel:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7.$$

a) Označme dva z uvažovaných (rôznych) súčinov S a Q, pričom $S < Q$. Z rovnosti

$$S \cdot S \cdot Q = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

vidíme, že prvočísla 5 a 7 musia byť zastúpené v súčine Q, takže $Q = 5 \cdot 7 \cdot x = 35x$, pričom x je jedno zo zvyšných čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8 a 9. Ďalej vidíme, že v rozklade dotyčného x musí mať prvočíslo 2 nepárny exponent a prvočíslo 3 párny exponent – tomu vyhovujú iba čísla 2 a 8. Pre $x = 2$ ale vychádza $Q = 35 \cdot 2 = 70 < S = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, čo odporuje predpokladu $S < Q$. Preto je nutne $x = 8$, pre ktoré vychádza $Q = 35 \cdot 2 = 280$ a $S^2 = 2^4 \cdot 3^4$ čiže $S = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Trojica súčinov je teda $(36, 36, 280)$.

Ostáva ukázať, že získanej trojici naozaj zodpovedá rozdelenie daných deviatich čísel na trojice:

$$S = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36, \quad S = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36, \quad Q = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280.$$

b) Označme uvažované súčiny S, Q a R, pričom $S < Q$ a $S < R$ (nie je ale vylúčené, že $Q = R$). V riešení časti a) sme zistili, že platí rovnosť

$$S \cdot Q \cdot R = 70 \cdot 72 \cdot 72.$$

Ak teda ukážeme, že existuje rozdelenie čísel, pri ktorom $S = 70$ a $R = Q = 72$, bude $S = 70$ hľadaná najväčšia hodnota, lebo keby pri niektorom rozdelení platilo $S \geqq 71$, muselo by byť $R \geqq 72$ aj $Q \geqq 72$ a tiež $S \cdot Q \cdot R \geqq 71 \cdot 72 \cdot 72$, čo zrejme odporuje predchádzajúcej rovnosti. Nájsť potrebné rozdelenie je jednoduché:

$$S = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70, \quad Q = 1 \cdot 8 \cdot 9 = 72, \quad R = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72.$$

Za systematické a úplné riešenie časti a) dajte 3 body, z toho iba 1 bod za náhodné, nezdôvodnené nájdenie výsledku. Za systematické a úplné riešenie časti b) dajte 3 body, z toho iba 1 bod za náhodné, nezdôvodnené nájdenie výsledku.

2. *V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané „–“ a v ostatných políčkach „+“. V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.* (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Počty plusov a mínusov v tabuľke sú na začiatku 63 a 1, teda dve nepárne čísla. V ľubovoľnom štvorci 2×2 môžu byť zastúpené jedným zo spôsobov $2 + 2$, $1 + 3$ alebo $0 + 4$ vo vhodnom poradí sčítancov, ktoré sa po vykonanom kroku zmenia na poradie opačné. Vidíme teda, že po jednom kroku sa celkové počty plusov a mínusov v tabuľke buď nemenia, alebo sa oba zmenia o 2, alebo sa oba zmenia o 4, takže to stále budú dve nepárne čísla ako na začiatku. To znamená, že nikdy nemôže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet, čiže párne číslo 32.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za správnu, ale nezdôvodnenú odpoveď dajte 1 bod.

---

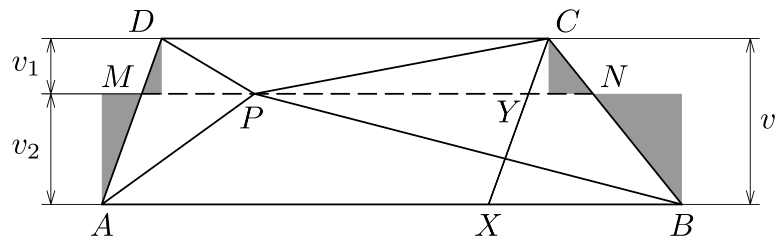
3. *Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, pričom $2|AB| = 3|CD|$.*

a) Nájdite bod P vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov ABP a CDP boli v pomere $3 : 1$ a aj obsahy trojuholníkov BCP a DAP boli v pomere $3 : 1$.

b) Pre nájdený bod P určte postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP.

(*Jaroslav Zhouf*)

Riešenie. Predpokladajme, že bod P má požadované vlastnosti. Priamka rovnobežná so základňami lichobežníka a prechádzajúca bodom P pretína ramená AD a BC postupne v bodoch M a N (obr. 1). Označme v výšku daného lichobežníka, v_1 výšku trojuholníka CDP a v_2 výšku trojuholníka ABP.



Obr. 1

a) Keďže obsahy trojuholníkov ABP a CDP sú v pomere $3 : 1$, platí

$$\frac{|AB|v_2}{2} : \frac{|CD|v_1}{2} = 3 : 1, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že v práve určenom pomere $2 : 1$ výšok v_2 a v_1 delí aj bod M rameno AD a bod N rameno BC (v prípade pravého uhla pri jednom z vrcholov A či B je to zrejmé rovno). Tým je konštrukcia bodov M a N, a teda aj úsečky MN určená. Teraz zistíme, v akom pomere ju delí uvažovaný bod P.

Keďže obsahy trojuholníkov BCP a DAP sú v pomere $3:1$, platí

$$\Big(\frac{|NP|v_1}{2}+\frac{|NP|v_2}{2}\Big):\Big(\frac{|MP|v_1}{2}+\frac{|MP|v_2}{2}\Big)=3:1,$$
$$\frac{|NP|(v_1+v_2)}{2}:\frac{|MP|(v_1+v_2)}{2}=3:1,\qquad |NP|:|MP|=3:1.$$

Tým je konštrukcia (jediného) vyhovujúceho bodu P úplne opísaná.

b) Doplňme trojuholník DAC na rovnobežník $DAXC$. Jeho strana CX delí priečku MN na dve časti, a keďže $v_1=\frac{1}{3}v$, môžeme dĺžku priečky MN vyjadriť ako $|MN|=|MY|+|YN|=|AX|+\frac{1}{3}|XB|=|CD|+\frac{1}{3}(|AB|-|CD|)=\frac{1}{3}|AB|+\frac{2}{3}|CD|=$ $=\frac{7}{6}|CD|$, lebo podľa zadania platí $|AB|=\frac{3}{2}|CD|$. Preto

$$|MP|=\frac{1}{4}|MN|=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot|CD|=\frac{7}{24}|CD|,$$

takže pre pomer obsahov trojuholníkov CDP a DAP platí

$$\frac{|CD|v_1}{2}:\frac{|MP|(v_1+v_2)}{2}=(|CD|v_1):\Big(\frac{7}{24}\cdot|CD|\cdot 3v_1\Big)=1:\frac{7}{8}=8:7.$$

Pomer obsahov trojuholníkov BCP a CDP je teda $21:8$ a pomer obsahov trojuholníkov ABP a BCP je tak $24:21$. Postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP je preto $24:21:8:7$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V časti a) dajte 1 bod za určenie pomeru $v_1:v_2=1:2$, 1 bod za určenie priečky MN a 1 bod za konečné určenie bodu P. V časti b) dajte 3 body, pričom strhnite 1 bod, ak nie je explicitne stanovený postupný pomer $24:21:8:7$.

---

4. *Hovoríme, že kladné reálne číslo je copaté, ak nie je prirodzené a vo svojom dekadickom zápise obsahuje za desatinnou čiarkou iba konečne veľa nenulových cifier.*

a) Nájdite dve copaté čísla a, b také, že $a\cdot b=2\,015$.

b) Rozhodnite, či existujú tri copaté čísla a, b, c také, že čísla $a\cdot b$, $b\cdot c$ a $c\cdot a$ sú všetky prirodzené.

(*Josef Tkadlec*)

Riešenie. a) Takých dvojíc copatých čísel je nekonečne veľa. Je to napr. dvojica

$$a=2\,015\cdot\frac{5}{2}=5\,037{,}5,\quad b=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Podobne vyhovuje každá z nekonečne veľa dvojíc

$$a=2\,015\cdot\frac{5^m}{2^n},\quad b=\frac{2^n}{5^m},$$

pričom m a n sú ľubovoľné prirodzené čísla. Uvedené číslo a má n desatinných miest, číslo b ich má m.

b) Taká trojica copatých čísel neexistuje.

Každé copaté číslo, ktoré má za desatinnou čiarkou poslednú nenulovú cifru na k-tom mieste, t. j. na mieste rádu 10^{-k}, môžeme pre vhodné prirodzené číslo s zapísať ako $s \cdot 10^{-k}$ ($k \geqq 1$). Pritom s nie je deliteľné desiatimi, môže teda byť deliteľné iba jedným z prvočísel 2 alebo 5, a to ľubovoľnou jeho mocninou.

Súčinom dvoch copatých čísel $a = s/10^k$ a $b = t/10^l$ dostaneme prirodzené číslo iba vtedy, keď je súčin st deliteľný 10^{k+l}, čiže keď jedno z čísel s, t je deliteľné 2^{k+l} a druhé 5^{k+l}, pričom $k + l \geqq 2$. Ak sú teda $a = s/10^k$, $b = t/10^l$, $c = u/10^m$ ľubovoľné copaté čísla také, že súčiny $a \cdot b$ a $a \cdot c$ sú prirodzené čísla, je z predchádzajúcej úvahy zrejmé, že obe čísla t aj u musia byť buď obe nepárne a deliteľné piatimi, alebo naopak obe párne a nedeliteľné piatimi, takže ich súčin tu nemôže byť deliteľný desiatimi, teda súčin $bc = tu/10^{l+m}$ nemôže byť celý.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vyriešenie časti a) dajte 2 body, za riadny dôkaz v časti b) dajte 4 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Roman Soták, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Stanislav Krajči, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015