64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15}. Určte n.*
(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Číslo $20^{15} = 2^{30} \cdot 5^{15}$ je deliteľné iba prvočíslami 2 a 5, hľadané číslo n musí preto byť tvaru $n = 2^a \cdot 5^b$, pričom a, b sú prirodzené čísla. Každý jeho kladný deliteľ má teda tvar $2^\alpha \cdot 5^\beta$, pričom $\alpha \in \{0, 1, \dots, a\}$ a $\beta \in \{0, 1, \dots, b\}$, navyše z vety o jednoznačnom rozklade prirodzeného čísla na súčin prvočísel vyplýva, že pre rôzne α, β dostávame rôzne delitele.

Pre každé $\beta \in \{0, 1, \dots, b\}$ uvažujme teraz všetky delitele čísla n, ktoré sú deliteľné číslom 5 práve v mocnine β. Sú to

$$\underbrace{2^0 \cdot 5^\beta,\ 2^1 \cdot 5^\beta,\ 2^2 \cdot 5^\beta, \dots,\ 2^a \cdot 5^\beta}_{a+1 \text{ čísel}}$$

a ich súčin je

$$2^{0+1+2+\dots+a} \cdot 5^{(a+1)\beta} = 2^{a(a+1)/2} \cdot 5^{(a+1)\beta}.$$

Keď vynásobíme všetky tieto súčiny pre $\beta = 0, 1, \dots, b$, dostaneme súčin všetkých kladných deliteľov čísla n, ktorý je tak rovný

$$2^{a(a+1)(b+1)/2} \cdot 5^{(a+1)b(b+1)/2}.$$

Z toho vyplýva, že pre nájdenie čísla n stačí vyriešiť v obore prirodzených čísel sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}a(a+1)(b+1) &= 30, \\ \tfrac{1}{2}(a+1)b(b+1) &= 15. \end{aligned} \tag{1}$$

Výrazy na oboch stranách týchto rovníc sú zrejme nenulové, ich vydelením dostaneme po úprave $a = 2b$, dosadením do prvej rovnice sústavy potom

$$b(b+1)(2b+1) = 30.$$

Keďže $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, vidíme, že jedno riešenie je $b = 2$. Keďže funkcia $x(x+1)(2x+1)$ je na množine kladných čísel ako súčin troch kladných rastúcich funkcií sama rastúca, je toto riešenie jediné. Sústava (1) má preto jediné riešenie $a = 4$, $b = 2$, ktorému zodpovedá hľadané prirodzené číslo $n = 2^4 \cdot 5^2 = 400$.

Existuje jediné prirodzené číslo n, ktoré vyhovuje podmienkam úlohy, a to $n = 400$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho za poznatok, že každý deliteľ čísla n má tvar $2^\alpha \cdot 5^\beta$, dajte 1 bod, za nájdenie ich súčinu dajte ďalšie 2 body, za zostavenie sústavy (1) (či sústavy s ňou ekvivalentnou) ďalší 1 bod, za jej správne vyriešenie a nájdenie čísla n zvyšné 2 body. Ak z metódy riešenia (1) nebude vyplývať, že nájdené riešenie je jediné a študent to nezdôvodní, strhnite 1 bod. Ak riešiteľ iba dokáže, že číslo $n = 400$ má požadovanú vlastnosť bez náznaku jeho odvodenia, dajte 2 body (k týmto bodom nemožno pripočítať body podľa prechádzajúcej schémy).

2. *Určte najmenšiu hodnotu výrazu*

$$V = x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

pričom x je ľubovoľné reálne číslo. Pre ktoré x výraz V túto hodnotu nadobúda?
(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Použijeme známu nerovnosť

$$a + \frac{1}{a} \geqq 2, \tag{1}$$

ktorá platí pre ľubovoľné kladné reálne číslo a, pretože vznikne algebraickou úpravou zrejmej nerovnosti $\left(\sqrt{a} - 1/\sqrt{a}\right)^2 \geqq 0$. Odtiaľ tiež vyplýva, že rovnosť v nej nastáva práve vtedy, keď $a = 1$.

Jednoduchou úpravou výrazu V dostaneme podľa (1) pre kladné $a = \frac{1}{2}(2x^2+1)$

$$V = \left(\frac{2x^2+1}{2} + \frac{2}{2x^2+1}\right) - \frac{1}{2} \geqq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Rovnosť v tejto nerovnosti nastáva práve vtedy, keď $\frac{1}{2}(2x^2+1) = 1$, t. j. práve vtedy, keď $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Najmenšia hodnota výrazu V je $\frac{3}{2}$, výraz túto hodnotu nadobúda pre $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Iné riešenie. Úprava

$$\begin{aligned} V &= x^2 + \frac{2}{2x^2+1} = \frac{2x^4 + x^2 + 2}{2x^2+1} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2x^2-1)^2 + 3x^2 + \frac{3}{2}}{2x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x^2-1)^2}{2x^2+1} + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

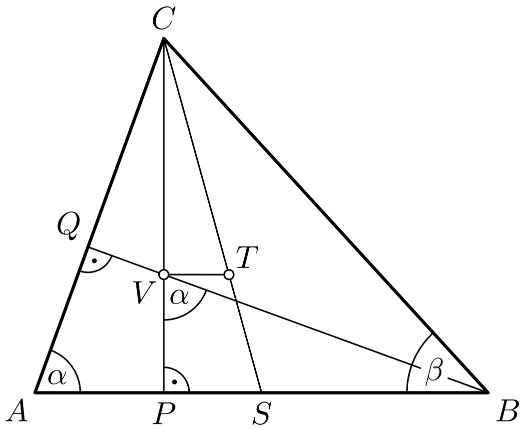
ktorá je korektná pre každé reálne číslo x, ukazuje, že $V \geqq \frac{3}{2}$, pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $2x^2 - 1 = 0$, čiže $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Nerovnosti typu (1) (zodpovedajúce AG nerovnosti pre dve nezáporné čísla) možno považovať za všeobecne známe a netreba ich dokazovať. Ak nebudú (správne) určené obe hodnoty x, pre ktoré V nadobúda svoje minimum, strhnite 2 body.

---

3. *Dokážte, že priesečník výšok a ťažisko daného ostrouhlého trojuholníka ABC majú rovnakú vzdialenosť od strany AB práve vtedy, keď pre vnútorné uhly α, β pri vrcholoch A, B platí rovnosť* $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 3$.
(Jaromír Šimša)

Riešenie. V trojuholníku ABC označme V priesečník výšok, T ťažisko, S stred strany AB a P a Q postupne päty výšok z vrcholov C a B (obr. 1).



Obr. 1

V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia body V a T vnútri polroviny ABC a bod P je vnútorným bodom úsečky AB. Pre $\alpha \neq \beta$ sú body V a T rôzne, a majú tak rovnakú vzdialenosť od strany AB práve vtedy, keď je priamka VT rovnobežná s priamkou AB. Vzhľadom na to, že bod T delí ťažnicu CS v pomere $2:1$, odvodená podmienka rovnobežnosti bude splnená práve vtedy, keď budú trojuholníky CVT a CPS podobné, t. j. práve vtedy, keď bude v rovnakom pomere deliť aj bod V výšku CP. Túto podmienku vyjadríme rovnosťou

$$\frac{|CP|}{|VP|} = 3. \tag{1}$$

V prípade $\alpha = \beta$ je $P = S$ a ťažisko T leží na výške CP, preto body V a T majú od základne AB rovnakú vzdialenosť práve vtedy, keď $V = T$, čo práve vyjadruje rovnosť (1).

Ostáva teda ukázať, že pomer dĺžok úsečiek v (1) sa dá vyjadriť ako súčin tangensov uhlov α a β. V ľubovoľnom ostrouhlom trojuholníku ABC platí, že pravouhlé trojuholníky ABQ a VBP sa zhodujú vo vnútornom uhle pri vrchole B (obr. 1), sú teda podobné a platí $|\angle BVP| = \alpha$. Z pravouhlých trojuholníkov VBP a CBP vyplýva

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BP|}{|VP|} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{|CP|}{|BP|},$$

preto všeobecne platí

$$\frac{|CP|}{|VP|} = \frac{|BP|}{|VP|} \cdot \frac{|CP|}{|BP|} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta. \tag{2}$$

Nutnú a postačujúcu podmienku (1) tak možno zapísať pomocou (2) ako $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 3$. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. V prípade $\alpha = \beta$ možno postup z uvedeného riešenia zjednodušiť. Bod T totiž vtedy leží na výške CP, takže má od strany AB rovnakú vzdialenosť ako bod V práve vtedy, keď platí $V = T$, čo je ekvivalentné s tým, že daný trojuholník ABC je rovnostranný, čiže oba (zhodné) uhly α a β majú veľkosť $60°$. A to je práve ten ostrý uhol, ktorého tangens má veľkosť $\sqrt{3}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho za odvodenie podmienky (1) dajte 3 body, za objav podobných trojuholníkov ABQ a VBP 1 bod a za dopočítanie dajte zvyšné 2 body. Ak chýba vysvetlenie, že tvrdenie platí aj v prípade $\alpha = \beta$, strhnite 1 bod. Ak sa jedná naopak o jediný vysvetlený prípad, dajte 1 bod.

4. *Na tabuli je zoznam čísel* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *a „rovnica"*

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici" a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici". Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča. (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Označme a, b, c koeficienty výslednej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Tá má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jej diskriminant (v symbolickej podobe)

$$b^2 - 4ac = \left(\frac{\square}{\square}\right)^2 - 4\left(\frac{\square}{\square}\right)\left(\frac{\square}{\square}\right)$$

kladný.

Ukážeme, že vyhrávajúcu stratégiu má Marek. Najskôr do menovateľa zlomku pre koeficient b napíše 1.

a) Ak Tomáš obsadí vo svojom prvom ťahu iné miesto ako v čitateli b, napíše do neho Marek v nasledujúcom ťahu najväčšie zostávajúce číslo zo zoznamu (teda 5 alebo 6). Hodnota b^2 potom bude aspoň 25 a zo zvyšných čísel možno zostaviť výraz $4ac$ s hodnotou nanajvýš $4 \cdot \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 16$. Diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice tak bude určite kladný.

b) Predpokladajme, že Tomáš vo svojom ťahu doplní čitateľa b. Marek potom v druhom ťahu napíše najmenšie zostávajúce číslo zo zoznamu (2 alebo 3) do čitateľa a (alebo c).

   (i) V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa b číslo 2, je hodnota b^2 rovná 4 a najväčšia možná hodnota $4ac$ (s prihliadnutím na druhý Marekov ťah) je $4 \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{5} < 4$, teda diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude opäť kladný.

   (ii) V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa b iné číslo ako 2, je hodnota b^2 aspoň 9 a hodnota $4ac$ je nanajvýš $4 \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 4$, takže diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude aj v tomto prípade kladný.

Záver. V danej hre môže vyhrať Marek nezávisle na ťahoch Tomáša. Jeho víťazná stratégia je opísaná vyššie.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za konštatovanie, že vyhrávajúcu stratégiu má Marek tým, že napíše 1 do menovateľa b, dajte 2 body. Zvyšnými 4 bodmi ohodnoťte úplnosť zvyšných úvah.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Roman Soták, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Stanislav Krajči, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015