64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$|x-5|+|y-9|=6,$$
$$|x^2-9|+|y^2-5|=52.$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Z prvej rovnice danej sústavy vyplýva $|y-9|=6-|x-5|\leqq 6$. Z toho dostávame $3\leqq y\leqq 15$, preto $y^2-5\geqq 4$, a teda $|y^2-5|=y^2-5$. Z druhej rovnice danej sústavy máme $y^2-5=52-|x^2-9|\leqq 52$, teda $y^2-5\leqq 52$, čiže $y^2\leqq 57<64$, takže $-8<y<8$. Z oboch odhadov tak máme $3\leqq y<8$, preto $|y-9|=9-y$. Množina riešení danej sústavy v obore reálnych čísel je tak zhodná s množinou riešení sústavy

$$|x-5|+9-y=6, \tag{1}$$
$$|x^2-9|+y^2-5=52 \tag{2}$$

v obore určenom nerovnosťami $3\leqq y<8$ (ktoré zrejme zaručujú, že sa v rovniciach (1) a (2) môžeme vrátiť k pôvodným absolútnym hodnotám). Z rovnice (1) dostaneme $|x-5|=y-3$, čo vďaka obmedzeniu $y<8$ dáva $|x-5|<5$, čiže $0<x<10$. Pre odstránenie absolútnych hodnôt v novej sústave rovníc tak rozlíšime iba tri prípady.

a) $0<x<3$. V tom prípade z (1) vyplýva $y=8-x$. Dosadením do (2) dostaneme

$$9-x^2+(8-x)^2-5=52$$

čiže $x=1$. Prislúchajúce $y=8-x=7$ obe východiskové obmedzenia $3\leqq y<$ <8 spĺňa.

b) $3\leqq x<5$. Aj v tomto prípade z (1) vyplýva $y=8-x$, dosadením do (2) však dostaneme

$$x^2-9+(8-x)^2-5=52,$$

čo po úprave dáva kvadratickú rovnicu $x^2-8x-1=0$. Ľahko overíme, že táto rovnica nemá koreň spĺňajúci podmienku $3\leqq x<5$.

c) $5\leqq x<10$. V tomto prípade z (1) vyplýva $y=x-2$. Dosadením do (2) dostaneme

$$x^2-9+(x-2)^2-5=52,$$

čo po úprave dáva $x^2-2x-31=0$. Táto rovnica má dva reálne korene $1\pm$ $\pm 4\sqrt{2}$, z ktorých podmienku $5\leqq x<10$ spĺňa iba koreň $x=1+4\sqrt{2}$. Podľa $y=x-2$ dopočítame $y=4\sqrt{2}-1$ a ako v bode a) sa presvedčíme, že sú splnené obmedzenia, ktoré sme so sústavou rovníc (1) a (2) spojili: Nerovnosti $3\leqq 4\sqrt{2}-1<8$ sú jasné dôsledky odhadu $1<\sqrt{2}<2$.

Vďaka nášmu postupu môžeme aj bez skúšky konštatovať, že pôvodne zadaná sústava rovníc má v obore reálnych čísel práve dve riešenia

$$(x;y)\in\{(1;7),(4\sqrt{2}+1;4\sqrt{2}-1)\}.$$

Poznámka. Zdôraznime, že odvodenú podmienku $y \leqq \sqrt{57}$ sme v riešení zamenili za slabšiu nerovnosť $y < 8$ len kvôli jednoduchosti ďalších zápisov. Podotknime tiež, že zo spôsobu odvodenia sústavy rovníc (1) a (2) je vidno, prečo *každé* jej riešenie v obore reálnych čísel spĺňa obmedzenie $3 \leqq y < 8$. Z rovnice (1) totiž vyplýva $9 - y \leqq 6$, čiže $y \geqq 3$, z rovnice (2) potom $y^2 - 5 \leqq 52$, čiže $|y| \leqq \sqrt{57}$. Taká zmienka by nemala v úplnom riešení podľa uvedeného postupu chýbať, ak sú v bodoch a) a c) vynechané záverečné previerky nerovností $3 \leqq y < 8$ a ak nie je prevedená záverečná skúška pre *pôvodnú* sústavu.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Vyriešte rovnicu $|4x - 2| + |x - 2| = 6$. [Rovnica má dve riešenia $-\frac{2}{5}$ a 2.]

N2. Nech pre reálne čísla x a y platí $|x^2 + 4| + |y^2 - 65| = 20$, potom $x \in \langle -4; 4\rangle$ a $y \in \in \langle -9; -7\rangle \cup \langle 7; 9\rangle$. Dokážte.

N3. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu $2^{|x+1|} - 2^x = 1 + |2^x - 1|$. [63–B–S–1]

D1. Určte všetky reálne čísla p, pre ktoré má rovnica $(x - 1)^2 = 3|x| - px$ práve tri rôzne riešenia v obore reálnych čísel. [52–B–II–3]

D2. Určte všetky reálne čísla s a t, pre ktoré je grafom funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{t|x - 1| + x + 7}$$

lomená čiara zložená z dvoch polpriamok. [50–A–II–2]

D3. Pre ktoré reálne čísla a, b je funkcia $f(x) = a|x - 1| + b(x - 3) + |x - b| + x - 1$ ohraničená? [49–B–S–1]

---

2. *Drak má n hláv, po jednej na každom z n krkov usporiadaných do kruhu. Rytier dokáže jedným úderom seknúť k susedných krkov a hlavy na nich sťať. Ak drakovi po údere zostane aspoň jedna hlava, môže si nechať niektorú z chýbajúcich hláv dorásť. Dokážte, že ak pre dané čísla n a k môže rytier draka zbaviť všetkých hláv bez ohľadu na to, ako mu dorastajú, dokáže to urobiť najviac tromi údermi.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že ak drak s aspoň $2k$ hlavami zvolí vhodnú stratégiu, rytier ho nikdy nemôže zbaviť všetkých hláv. Očíslujme krky draka dokola v kladnom smere (t. j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek) číslami od 1 po n, pritom $n \geqq 2k$. V kladnom smere je tak medzi krkmi s číslami 1 a $k + 1$ práve $k - 1$ krkov, zatiaľ čo v smere opačnom je medzi nimi $n - k - 1 \geqq k - 1$ krkov. Keďže rytier môže sekať po k susedných krkoch, nemôže jedným úderom sťať hlavy na krkoch s číslami 1 a $k + 1$. Ak pri niektorom údere zotne jednu z nich, drak si ju nechá dorásť (má na to nárok vďaka druhej z oboch hláv). Tak si drak zabezpečí, že pred každým úderom bude mať obe spomenuté hlavy, takže ho rytier všetkých hláv nikdy nezbaví.

Prejdime k prípadu, keď platí opačná nerovnosť $n < 2k$, čiže $n \leqq 2k - 1$, a opíšme ďalej, ako vtedy rytier dokáže zbaviť draka všetkých hláv nanajvýš tromi údermi. Pre $k = 1$ je $n \leqq 2 - 1 = 1$ a v takom prípade stačí zrejme rytierovi jediný úder. Môžeme teda predpokladať, že $k \geqq 2$.

Aj v prípade, keď $n \leqq k$, vie rytier prvým sekom sťať všetky dračie hlavy. Predpokladajme preto ďalej, že $k < n \leqq 2k - 1$.

Najskôr ukážeme, že pokiaľ má drak $n \leqq 2k - 1$ krkov, môže rytier sťať ľubovoľné dve hlavy A, B jedným úderom. Nech medzi hlavami A a B je v kladnom smere l hláv a v opačnom smere m hláv. Potom $l + m = n - 2 \leqq 2k - 3$. Ak by obe čísla l a m boli aspoň $k - 1$, bol by ich súčet aspoň $2k - 2$, čo nie je možné. Preto je aspoň jedno z čísel l alebo m najviac $k-2$. Ak teda rytier sekne cez k krkov počínajúc hlavou A pre $l \leqq k-2$ v kladnom smere a pre $m \leqq k-2$ v smere opačnom, zotne s hlavou A aj hlavu B. Teraz už opíšeme stratégiu rytiera.

Rytier prvým úderom zotne k hláv a drakovi zostane množina M susediacich hláv, ktorá obsahuje $n-k \leqq k-1$ hláv. Druhým úderom rytier zotne všetky hlavy z množiny M. Medzitým drakovi mohli dorásť nanajvýš dve hlavy, tie však rytier dokáže sťať jedným úderom, ako sme ukázali vyššie, a drak teda po nanajvýš troch úderoch zostane bez hláv. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Uvažujme situáciu zo zadania úlohy 2. Nech rytier dokáže jedným úderom sekať po 2 susedných krkoch.
   a) Ak má drak 3 hlavy, potom je rytier schopný zbaviť draka všetkých hláv dvoma údermi. Opíšte rytierovu stratégiu.
   b) Dokážte, že ak má drak 4 hlavy, potom si drak môže nechať dorásť hlavy tak, že ho rytier nikdy nezbaví všetkých hláv. Opíšte drakovu stratégiu.

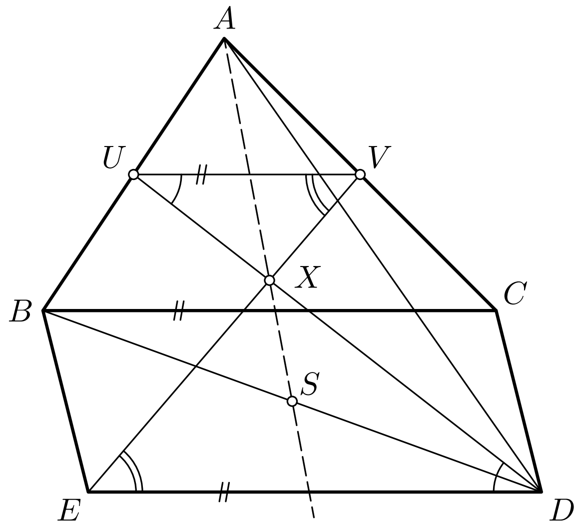
   [Označme hlavy draka dokola číslami $1, 2, \ldots$ a) Nech rytier prvým úderom zotne hlavy 2 a 3. Drakovi ostáva hlava 1, preto si niektorú zo sťatých hláv nechá dorásť. Ale každá zo sťatých hláv susedí s hlavou 1, a akonáhle dorastie, rytier ju zotne spolu s hlavou 1 druhým úderom. b) Rytier nemôže jedným úderom sekať po krkoch, na ktorých sú hlavy 2 a 4, súčasne však jedným úderom musí jednu z týchto dvoch hláv sťať. Po každom údere teda drakovi ostane buď hlava 2, alebo hlava 4 a drak si následne nechá druhú z týchto hláv dorásť.]

D1. Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby po konečnom počte vhodných krokov boli na všetkých stenách kocky rovnaké čísla. [60–A–I–5]

---

3. *V trojuholníku ABC označme U stred strany AB a V stred strany AC. V polrovine opačnej k polrovine BCA uvažujme ľubovoľný rovnobežník $BCDE$. Označme X priesečník priamok UD a VE. Dokážte, že priamka AX delí rovnobežník $BCDE$ na dve časti s rovnakým obsahom.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Uvedomme si, že rovnobežník je stredovo súmerný podľa priesečníka uhlopriečok. Ľubovoľná priamka prechádzajúca týmto priesečníkom preto delí rovnobežník na dve zhodné oblasti s rovnakým obsahom. Označme S priesečník uhlopriečok rovnobežníka $BCDE$, je to zároveň stred úsečky BD (obr. 1). Na dôkaz, že priamka AX



Obr. 1

delí rovnobežník na dve časti s tým istým obsahom, teda stačí ukázať, že prechádza bodom S.

Úsečka UV je strednou priečkou trojuholníka ABC, takže je rovnobežná so stranou BC a má oproti nej polovičnú dĺžku. Strana ED rovnobežníka $BCDE$ je tiež rovnobežná so stranou BC a má s ňou zhodnú dĺžku. Úsečky UV a ED sú teda rovnobežné a $|UV| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|ED|$.

Uhly DUV a EDU sú striedavé, teda zhodné, podobne sú zhodné aj uhly EVU a DEV. Trojuholníky UVX a DEX sú preto podobné a platí $|UX|/|XD| = |UV|/|ED| = \frac{1}{2}$. Keďže úsečka UD je ťažnicou trojuholníka ABD, je bod X je jeho ťažiskom. Na priamke AX preto leží ťažnica z vrcholu A trojuholníka ABD, takže na nej leží aj stred S protiľahlej strany BD.

Z toho už podľa úvodného odseku vyplýva, že priamka AX delí rovnobežník $ABCD$ na dve (dokonca zhodné) časti s tým istým obsahom.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že priamka delí rovnobežník na dve časti s rovnakým obsahom práve vtedy, keď prechádza jeho priesečníkom uhlopriečok (*stredom rovnobežníka*). [Rovnobežník je stredovo súmerný, priamka prechádzajúca jeho stredom ho teda delí na dve zhodné časti. Naopak, nech daná priamka delí rovnobežník na dve časti s rovnakým obsahom. V prípade, že prechádza dvoma susednými stranami, vytne trojuholník, ktorého obsah je nanajvýš polovica obsahu štvoruholníka, rovnosť nastane v prípade uhlopriečky. Ak priamka prechádza protiľahlými stranami, vzniknú dva lichobežníky s rovnakou výškou, tie majú zhodný obsah práve vtedy, keď majú zhodný súčet základní.]

N2. Zopakujte si základné vlastnosti ťažníc a ťažiska trojuholníka.

D1. Lichobežník $ABCD$ má základne AB a CD postupne dĺžok 18 cm a 6 cm. Pre bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Ťažiská trojuholníkov ADE, CDE, BCE, ktoré označíme postupne K, L, M, tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.
   a) Dokážte, že priamky KM a CM zvierajú pravý uhol.
   b) Vypočítajte dĺžky ramien lichobežníka $ABCD$.
   [60–C–II–3]

D2. Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod X. Zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom X a rozdeľuje daný rovnobežník na dve časti, ktorých obsahy sa navzájom líšia čo najviac. [61–A–III–4]

---

4. *Nech m je prirodzené číslo, ktoré má 7 kladných deliteľov, a n je prirodzené číslo, ktoré má 9 kladných deliteľov. Koľko deliteľov môže mať súčin $m \cdot n$?* (Eva Patáková)

Riešenie. Nech $r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ je rozklad prirodzeného čísla r na súčin prvočísel, pričom $p_1, p_2, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla a $a_1, a_2, \dots, a_k$ kladné celé čísla. (Taký rozklad je až na poradie prvočísel jednoznačný.) Každý deliteľ d prirodzeného čísla r má potom tvar $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, pričom

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq a_1,\ 0 \leqq \alpha_2 \leqq a_2,\ \dots,\ 0 \leqq \alpha_k \leqq a_k. \tag{1}$$

Počet deliteľov teda presne zodpovedá počtu možností, ako vybrať k-ticu nezáporných celých čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ spĺňajúcich podmienky (1). Keďže každé z čísel α_i môžeme vybrať práve $a_i + 1$ spôsobmi ($1 \leqq i \leqq k$), je podľa kombinatorického pravidla súčinu počet deliteľov prirodzeného čísla r rovný

$$\tau(r) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1). \tag{2}$$

Uvedomme si, že každý z činiteľov v (2) je väčší ako 1. Keďže číslo m má 7 deliteľov (číslo 7 je prvočíslo), má m prvočíselný rozklad tvaru $m = p^6$. Podobne všetky čísla n

s deviatimi deliteľmi majú prvočíselný rozklad $n = q_1^8$ alebo $n = q_1^2 q_2^2$, pričom $q_1 \neq q_2$. Naozaj, $3 \cdot 3$ je jediný rozklad čísla 9 na činitele väčšie ako 1.

Rozoberieme teraz všetky možnosti, majúc na pamäti, že prvočíslo p sa môže rovnať jednému z prvočísel q_i.

A. Prípad $n = q_1^8$.

a) Nech $p \neq q_1$. Potom $mn = p^6 q_1^8$ je rozklad čísla mn na súčin prvočísel. Číslo mn má v tomto prípade $7 \cdot 9 = 63$ deliteľov.

b) Nech $p = q_1$. Potom $mn = p^6 p^8 = p^{14}$ je rozklad čísla mn na súčin prvočísel. Číslo mn má v tomto prípade 15 deliteľov.

B. Prípad $n = q_1^2 q_2^2$.

a) Nech $q_1 \neq p \neq q_2$. Potom $mn = p^6 q_1^2 q_2^2$ je rozklad čísla mn na súčin prvočísel. Číslo mn má v tomto prípade $7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$ deliteľov.

b) Niektoré z prvočísel q_1, q_2 je rovné p. Keďže v rozklade čísla n sú v rovnakých mocninách, stačí rozobrať jeden z týchto prípadov, napr. $p = q_1$. Potom $mn = p^6 p^2 q_2^2 = p^8 q_3^2$ je rozklad čísla mn na súčin prvočísel. Číslo mn má v tomto prípade $9 \cdot 3 = 27$ deliteľov.

Počet deliteľov čísla mn môže byť 15, 27 alebo 63. Príslušný počet deliteľov dostaneme, ak vezmeme napr. $m = 64 = 2^6$ a čísla n rovné $256 = 2^8$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$ alebo $225 = 3^2 \cdot 5^2$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Koľko kladných deliteľov majú čísla 24, 128 a 105? Koľko kladných deliteľov má súčin každej dvojice týchto čísel? [Každé z čísel má 8 deliteľov, $24 \cdot 128$ má 22 deliteľov, $24 \cdot 105$ má 48 deliteľov, $128 \cdot 105$ má 64 deliteľov.]

N2. Aké sú všetky možné rozklady čísla s 8 kladnými deliteľmi na súčin prvočísel? [p_1^7, $p_1^3 p_2$, $p_1 p_2 p_3$.]

N3. Určte najmenšie prirodzené číslo s ôsmimi kladnými deliteľmi. [Z výsledku predchádzajúcej úlohy vyplýva, že hľadaným je číslo 24, najmenšie z čísel 2^7, $2^3 \cdot 3$ a $2 \cdot 3 \cdot 5$.]

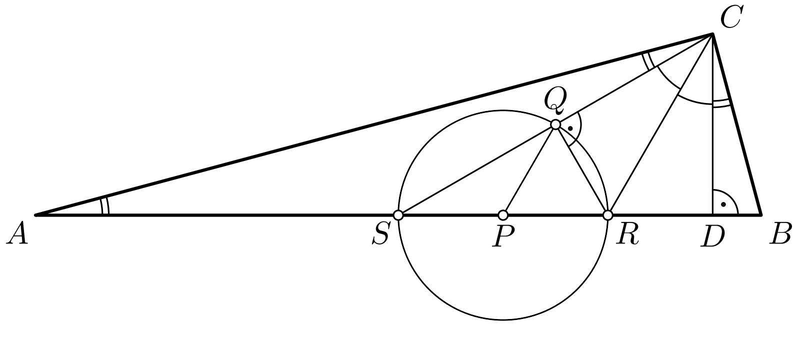
N4. Nech $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ je rozklad prirodzeného čísla n na súčin prvočísel. Dokážte, že potom má číslo n práve $\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_s + 1)$ kladných deliteľov.

D1. Označme $\tau(k)$ počet všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla k a nech n je riešením rovnice $\tau(1{,}6n) = 1{,}6\tau(n)$. Určte hodnotu podielu $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$. [48–A–I–4]

---

5. *Nech S je stred prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, ktorý nie je rovnoramenný. Označme D pätu výšky z vrcholu C a R priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s preponou AB. Určte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka, ak platí $|SR| = 2|DR|$.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. O danom trojuholníku ABC budeme predpokladať, že z jeho odvesien AC a BC je dlhšia tá prvá, a že teda uhol BAC (vyznačený dvoma oblúčikmi na obr. 2) je



Obr. 2

menší ako 45°. V opačnom prípade stačí v celom riešení vrátane záverečnej odpovedi navzájom vymeniť vrcholy A a B.

Keďže trojuholník ASC je rovnoramenný (bod S je stredom Tálesovej kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku ABC), je $|\measuredangle ACS| = |\measuredangle BAC|$. Pravouhlé trojuholníky ABC a CBD sa zhodujú vo vnútornom uhle pri vrchole B, sú teda podobné a vyplýva z toho zhodnosť uhlov BAC a BCD. Uhly ACS a BCD sú teda zhodné a menšie ako 45°, takže ich do pravého uhla ACB dopĺňa nenulový uhol SCD, ktorého os je navyše zhodná s osou celého uhla ACB, čo je polpriamka CR. Zároveň z toho vyplýva aj zhodnosť uhlov SCR a DCR (a tiež to, že bod R leží medzi bodmi S a D).

Označme P stred úsečky SR a Q pätu kolmice z bodu R na priamku SC. Pravouhlé trojuholníky CQR a CDR s pravými uhlami pri vrcholoch Q a D sa zhodujú vo veľkostiach vnútorného uhla pri vrchole C a v dĺžke (spoločnej) prepony CR, sú preto zhodné a podľa predpokladu úlohy tak platí $|QR| = |DR| = \frac{1}{2}|SR| = |PR|$. To znamená, že trojuholník PRQ je rovnostranný, takže $|\measuredangle PRQ| = 60°$, $|\measuredangle RSQ| = 30°$ a $|\measuredangle SCD| = 60°$. Keďže uhol pri vrchole C je pravý, vychádza $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle ACS| =$ $= 15°$ a $|\measuredangle ABC| = 75°$.

Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení ukážeme, že CR je osou uhla SCD. Táto os delí stranu SD trojuholníka SCD v rovnakom pomere, ako je pomer dĺžok strán priľahlých k týmto úsekom (pozri návodnú úlohu 1). Teda podľa predpokladu úlohy platí

$$\sin|\measuredangle CSD| = \frac{|CD|}{|CS|} = \frac{|RD|}{|RS|} = \frac{1}{2}.$$

Preto je veľkosť uhla CSD rovná 30° a veľkosť uhla BAC je 15° alebo 75°.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Os vnútorného uhla trojuholníka ABC pri vrchole C pretína stranu AB v bode R. Dokážte rovnosť pomerov $|AC| : |BC| = |AR| : |BR|$. [Označme v veľkosť výšky trojuholníka ABC prechádzajúcej bodom C. Bod R leží na osi uhla ACB, jeho vzdialenosť od strán AC a BC je teda rovnaká, označme ju r. Dvoma spôsobmi vyjadríme obsah trojuholníka ARC, platí $\frac{1}{2}|AR|v = \frac{1}{2}|AC|r$. Podobne vyjadríme aj obsah trojuholníka BRC, platí $\frac{1}{2}|BR|v = \frac{1}{2}|BC|r$. Vydelením oboch týchto rovností dostaneme požadovaný vzťah.]

N2. Pomocou veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka vyjadrite veľkosti uhlov, ktoré zvierajú výšky trojuholníka s jednotlivými stranami a medzi sebou navzájom.

N3. Daná je kružnica k so stredom S. Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k, prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS, vytína na kružniciach tetivy NP a NQ. Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]

N4. Pre vnútorný bod P strany AB ostrouhlého trojuholníka ABC označme K a L päty kolmíc z bodu P na priamky AC a BC. Zostrojte taký bod P, pre ktorý priamka CP rozpoľuje úsečku KL. [58–B–S–2]

N5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme K a L päty výšok z vrcholov A a B, M stred strany AB a V priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že os uhla KML prechádza stredom úsečky VC. [54–B–II–3]

D1. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici. [62–B–I–3]

D2. V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD. [57–B–II–3]

D3. V ľubovoľnom ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme O, V a S postupne stred kružnice opísanej, priesečník výšok a stred kružnice vpísanej. Dokážte, že os úsečky OV prechádza bodom S práve vtedy, keď jeden vnútorný uhol trojuholníka ABC má veľkosť $60°$. [59–A–I–4]

D4. Označme S stred kružnice vpísanej danému trojuholníku ABC a P, Q päty kolmíc z vrcholu C na priamky, na ktorých ležia osi vnútorných uhlov BAC a ABC. Dokážte, že priamky AB a PQ sú rovnobežné. [51–A–S–2]

---

6. *Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí*

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\leqq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť. (*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Najskôr dokážeme jednoduchšiu nerovnosť

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}\leqq\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Big) \tag{1}$$

pre ľubovoľné dve kladné čísla a, b. Menovateľ prvého zlomku v (1) je zrejme kladný, lebo

$$a^2-ab+b^2=(a-\tfrac{1}{2}b)^2+\tfrac{3}{4}b^2>0.$$

Po vynásobení nerovnosti (1) kladnými menovateľmi všetkých zlomkov na oboch stranách dostaneme po úprave ekvivalentnú nerovnosť

$$0\leqq a^4-a^3b-ab^3+b^4=(a^3-b^3)(a-b), \tag{1'}$$

ktorá je zrejme splnená, pretože

a) v prípade $a>b$ platí $a^3>b^3$ a na pravej strane nerovnosti je súčin dvoch kladných reálnych čísel;

b) v prípade $a=b$ je na pravej strane nerovnosti nula;

c) v prípade $a<b$ platí $a^3<b^3$ a na pravej strane nerovnosti je súčin dvoch záporných reálnych čísel.

Z tejto diskusie zároveň vyplýva, že rovnosť nastane práve vtedy, keď $a=b$.

Zámenou premenných (a,b) v nerovnosti (1) premennými (b,c), (c,a) dostaneme postupne nerovnosti

$$\frac{1}{b^2-bc+c^2}\leqq\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Big), \tag{2}$$

$$\frac{1}{c^2-ca+a^2}\leqq\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\Big), \tag{3}$$

v ktorých nastane rovnosť práve vtedy, keď postupne platí $b=c$ a $c=a$.

Sčítaním nerovností (1), (2) a (3) tak dostaneme dokazovanú nerovnosť

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\leqq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť vo všetkých troch použitých nerovnostiach, teda práve vtedy, keď $a=b=c$.

Poznámka. Nerovnosť (1′) možno dokázať mnohými inými postupmi. Napríklad ju môžeme upraviť na ekvivalentný tvar

$$0 \leqq (a-b)^2(a^2+ab+b^2),$$

alebo môžeme použiť permutačnú nerovnosť[1] pre súhlasne usporiadané dvojice (a,b), (a^3,b^3), alebo môžeme použiť nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom[2] pre dve štvorice $(\frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}b^4)$ a $(\frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}b^4, \frac{1}{4}b^4, \frac{1}{4}b^4)$ a výsledné nerovnosti sčítať, a pod.

Z uvedeného postupu vyplýva, že dokazovaná nerovnosť platí dokonca pre všetky *nenulové* reálne čísla a, b, c.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte nerovnosť $a^2-ab+b^2>0$ pre ľubovoľné dve reálne čísla a, b. [Nerovnosť dostaneme jednoduchou úpravou na štvorec, alebo ukážeme, že uvedený kvadratický trojčlen má v premennej a záporný diskriminant.]

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platia nerovnosti

$$a^2+b^2 \geqq 2ab, \qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2, \qquad a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2, \qquad \frac{1}{a+b} \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Kedy v nich nastáva rovnosť?

N3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

[Podľa predchádzajúcej úlohy platí $\frac{1}{a+b} \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Podobne platí aj $\frac{1}{b+c} \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ a $\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$. Sčítaním týchto troch nerovností dostaneme požadovanú nerovnosť, v ktorej nastáva rovnosť práve vtedy, keď nastáva rovnosť vo všetkých použitých nerovnostiach, t. j. v prípade $a=b=c$.]

N4. Určte všetky dvojice (x,y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

[63–B–I–2]

N5. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovnosti zistite, kedy prechádza na rovnosť. [59–C–I–5]

N6. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b a c platí nerovnosť

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. [55–B–S–1]

---

[1] Napr. Herman J., Šimša J., Kučera R., *Metody řešení matematických úloh*, Masarykova univerzita Brno, 1996, str. 126–129.

[2] Napr. Kufner A., *Nerovnosti a odhady*, *ŠMM 39*, ÚV MO vo vydavateľstve Mladá fronta, Praha, 1989, kapitola I.

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

[49–A–II–3]

D2. Dokážte, že pre každú trojicu x, y, z kladných čísel platí nerovnosť

$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\right) \leqq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. [47–B–I–3]

D3. Dokážte, že pre každú trojicu x, y, z nezáporných čísel platí nerovnosť

$$x(x-\sqrt{yz}) + y(y-\sqrt{zx}) + z(z-\sqrt{xy}) \geqq 0.$$

Zistite, kedy platí rovnosť. [17–A–II–2]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014