62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória D – krajské kolo
Riešenie úloh

1. Lode na mori

Riešenie:

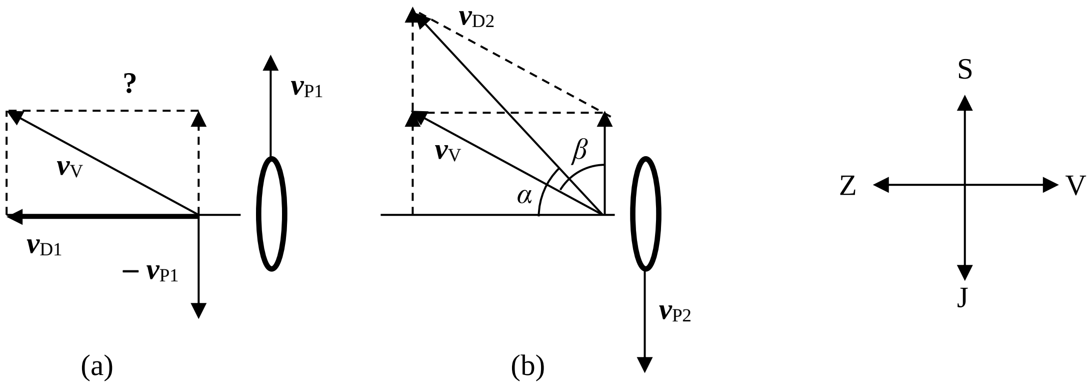
a) Prevod jednotiek

$$v_P = 20 \text{ uzlov} = 20 \times \frac{1 \text{ n. m.}}{1 \text{ h}} = 20 \times \frac{1{,}852 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 37 \text{ km/h} \ . \qquad 2 \text{ b}$$

b) Vzhľadom na hladinu mora je dym oboch parníkov unášaný rovnakým smerom – v smere vetra.

Pre pozorovateľov na lodiach sa od rýchlosti $\boldsymbol{v}_V$ odčíta (vektorovo) rýchlosť $\boldsymbol{v}_P$ príslušného parníka, takže pozorovaná rýchlosť dymu $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_V - \boldsymbol{v}_P$.

Keďže na prvom parníku pozorujú smer dymu kolmo na smer plavby, musí byť pozdĺžna zložka rýchlosti vetra rovnaká ako rýchlosť plavby parníka, tzn. $v_{V\parallel} = v_P$, obr. RD–1 (a). 2 b



Obr. RD–1

Na druhej lodi pozorujú dymovú stopu pod uhlom $\alpha = 45°$ vzhľadom na kolmicu k smeru plavby (smer SZ), obr. RD–1 (b). Kolmá zložka rýchlosti vetra $v_{V\perp}$ musí byť rovná dvojnásobku rýchlosti parníku, tzn. $v_{V\perp} = 2\, v_P$. 2 b

Veľkosť rýchlosti vetra

$$v_V = \sqrt{v_{V\parallel}^2 + v_{V\perp}^2} = \sqrt{v_P^2 + (2v_P)^2} = \sqrt{5}\, v_P \approx 10 \text{ m/s} \approx 44{,}7 \text{ kt.} \qquad 2 \text{ b}$$

Smer vetra je určený uhlom β vzhľadom na sever, obr. RD–1 (b), pre ktorý máme

$$\tan\beta = \frac{v_{V\perp}}{v_{V\parallel}} = 2 \text{ , odkiaľ } \beta \approx 63°. \qquad 2 \text{ b}$$

2. Opretá doska

Riešenie:

Obr. RD–2. 2 b

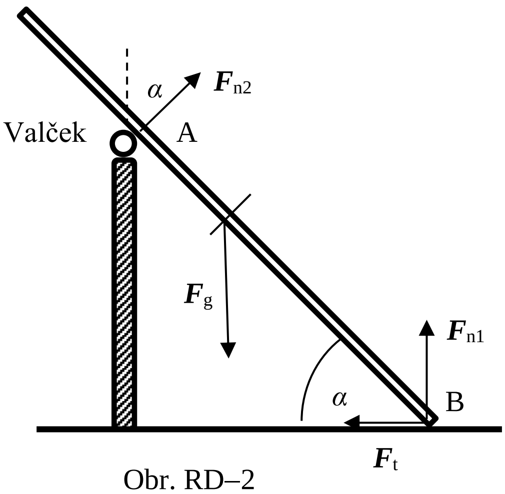
Na dosku pôsobia sily:

$\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$ tiažová sila pôsobí v ťažisku dosky

$\boldsymbol{F}_t$ – sila trenia na dolnom konci dosky

$\boldsymbol{F}_{n1}$ – sila tlaku podložky v zvislom smere

$\boldsymbol{F}_{n2}$ – tlaková sila v bode A opretia dosky kolmá na dosku 2 b



Obr. RD–2

V podmienkach statickej rovnováhy platia podmienky rovnováhy síl a momentov síl

$$F_g - F_{n1} - F_{n2}\cos\alpha = 0 \qquad (1) \quad 1\text{ b}$$

$$F_{n2}\sin\alpha - F_t = 0 \qquad (2) \quad 1\text{ b}$$

a momenty vzhľadom na bod B

$$F_g \frac{L}{2}\cos\alpha - F_{n2} L_{AB} = 0\,. \qquad (3) \quad 1\text{ b}$$

Z rovníc (2) a (3) určíme silu trenia

$$F_t = F_g \frac{L}{2L_{AB}}\cos\alpha\sin\alpha$$

a z rovníc (1) a (3) tlakovú silu podložky

$$F_{n1} = F_g\left(1 - \frac{L}{2L_{AB}}\cos\alpha\cos\alpha\right)$$

Pre statické trenie platí $F_t \le f\ F_{n1}$, odkiaľ po dosadení dostávame

$$f \ge \frac{L\cos\alpha\sin\alpha}{2L_{AB} - L\cos\alpha\cos\alpha}\,. \quad 2\text{ b}$$

Pre $\alpha = 45°$ $L_{AB} = (3/4)\,L$ a $\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{1/2}$. Po dosadení $f \ge 0{,}50$. 1 b

3. Prieskum planéty

Riešenie:

a) Na vozidlo pôsobí gravitačná sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\,\boldsymbol{g}$ smerom do stredu planéty a zotrvačná (odstredivá) sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{o} = m\,\omega^2\,r$ v smere kolmo na os rotácie. Výsledná tiažová sila je vektorovým súčtom oboch síl. Odstredivá sila je maximálna na rovníku, kde polomer $r = R$ (polomer planéty) a pôsobí proti sile gravitačnej, a tiaž je teda minimálna $F_{\mathrm{G\,min}} = m\,g - m\,\omega^2\,R$. Na póle planéty je $r = 0$, a teda i $F_\mathrm{o} = 0$ a tiaž vozidla je maximálna $F_{\mathrm{G\,max}} = m\,g$. 2 b

b) Rozdiel krajných hodnôt tiaže je

$$F_{\mathrm{G\,max}} - F_{\mathrm{G\,min}} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R\,,$$

odkiaľ získame polomer planéty

$$R = \frac{T^2}{4\pi^2 m}\left(F_{\mathrm{G\,max}} - F_{\mathrm{G\,min}}\right) \approx 3{,}14\cdot 10^6\ \mathrm{m}.$$

Priemerná rýchlosť vozidla

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{t} = \frac{T^2}{2\pi m t}\left(F_{\mathrm{G\,max}} - F_{\mathrm{G\,min}}\right) \approx 0{,}93\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 3{,}3\ \mathrm{km/h}.$$ 3 b

c) Tiaž na póle $F_{\mathrm{G\,max}}$ je rovná gravitačnej sile

$$F_{\mathrm{G\,max}} = G\,\frac{M\,m}{R^2}\,,$$

odkiaľ máme hmotnosť planéty

$$M = F_{\mathrm{G\,max}}\,\frac{R^2}{G\,m} = F_{\mathrm{G\,max}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{G\,m^3}\left(F_{\mathrm{G\,max}} - F_{\mathrm{G\,min}}\right)^2 \approx 5{,}18\cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}.$$ 2 b

V porovnaní s hmotnosťou Zeme $M / M_\mathrm{Z} \approx 8{,}6$ %. 1 b

Priemerná hustota planéty

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\,\pi\,F_{\mathrm{G\,max}}}{G\,T^2\left(F_{\mathrm{G\,max}} - F_{\mathrm{G\,min}}\right)} \approx 4{,}0\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$ 2 b

4. Teliesko v ľade

Riešenie:

Najprv si označíme jednotlivé veličiny:

m, V – hmotnosť a objem ľadového telesa so zamrznutým hliníkovým valčekom na začiatku

m_A, V_A – hmotnosť a objem hliníkového valčeka

m_L, V_{L1} – začiatočná hmotnosť a začiatočný objem ľadu v telese

a) Hmotnosť telesa $m = m_{L1} + m_A = \rho_L V_{L1} + \rho_A V_A$ je podľa Archimedovho zákona rovná hmotnosti vody s objemom $V_1 - V_0$ vytlačenej ponorenou časťou telesa

$$\rho_L V_{L1} + \rho_A V_A = \rho_V (V_1 - V_0). \qquad (1)$$

Po zatlačení telesa pod hladinu je začiatočný objem telesa

$$V_{L1} + V_A = V_2 - V_0. \qquad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) určíme objem hliníkového valčeka v telese

$$V_A = \frac{\rho_V (V_1 - V_0) - \rho_L (V_2 - V_0)}{\rho_A - \rho_L} \approx 8{,}94\ \text{cm}^3.$$ 3 b

b) Z rovnice (2) určíme začiatočný objem ľadu v telese .

$$V_{L1} = V_2 - V_0 - V_A = \frac{\rho_A (V_2 - V_0) - \rho_V (V_1 - V_0)}{\rho_A - \rho_L} \approx 365{,}1\ \text{cm}^3.$$

Teleso sa vznáša, ak je jeho hmotnosť rovná hmotnosti vody s rovnakým objemom.
Označíme V_{L2} hmotnosť ľadu v telese, keď sa teleso začne vznášať.

$$\rho_L V_{L2} + \rho_A V_A = \rho_V (V_{L2} + V_A),$$

odkiaľ máme $V_{L2} = \dfrac{\rho_A - \rho_V}{\rho_V - \rho_L} V_A$.

Hľadaný pomer je po dosadení a úprave

$$p = \frac{V_{L1} - V_{L2}}{V_{L1}} = \frac{\rho_V (\rho_A - \rho_L)(V_2 - V_1)}{(\rho_V - \rho_L)\left[\rho_A (V_2 - V_0) - \rho_V (V_1 - V_0)\right]} \approx 0{,}479 = 47{,}9\ \%.$$ 4 b

c) Po roztopení ľadu sa zmení objem V_{L1} ľadu na objem V_{V1} vody, takže objem valčeka a vody z roztopeného ľadu $\Delta V = V_A + \dfrac{\rho_L V_{L1}}{\rho_V}$.

Údaj na odmernom valci je

$$V_3 = V_0 + \Delta V = V_0 + \frac{\rho_V - \rho_L}{\rho_A - \rho_L}(V_1 - V_0) + \left(\frac{\rho_L}{\rho_V}\right)\frac{\rho_A - \rho_V}{\rho_A - \rho_L}(V_2 - V_0) \approx 745\ \text{ml}.$$ 3 b

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autor návrhov úloh: Ľubomír Konrád

Recenzia a úprava úloh a riešení: Aba Teleki, Ľubomír Mucha, Ivo Čáp

Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021