62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória C – krajské kolo
Riešenie úloh

1. Šikmý vrh

Riešenie:

a) Pre súradnice trajektórie kameňa platia vzťahy

$$x = v_0\, t\cos\alpha \qquad y = v_0\, t\sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 .$$

Pre vzdialenosť d bodu dopadu v prvom prípade dostávame

$$d = v_0\, t_1 \cos\alpha_1 \qquad (1)$$

a $$0 = v_0\, t_1 \sin\alpha_1 - \frac{1}{2} g\, t_1^2 \text{, resp. } v_0 \sin\alpha_1 = \frac{1}{2} g\, t_1 \qquad (2)$$

Podobne pre druhý vrh, keď kameň doletel do rovnakej vzdialenosti d, máme

$$d = v_0\, t_2 \cos\alpha_2 \qquad (3)$$

a $$0 = v_0\, t_2 \sin\alpha_2 - \frac{1}{2} g\, t_2^2 \text{. resp. } v_0 \sin\alpha_2 = \frac{1}{2} g\, t_2 \qquad (4)$$

Možnosti úprav a hľadania neznámych sú rôzne. Uvedieme jednu z možností:
S použitím (1) a (2)

$$\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 = \left(\frac{d}{v_0\, t_1}\right)^2 + \left(\frac{g\, t_1}{2 v_0}\right)^2 = 1 \text{, resp. } \left(\frac{d}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{g\, t_1^2}{2 v_0}\right)^2 = t_1^2 . \qquad (5)$$

Rovnako z (3) a (4)

$$\cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_2 = \left(\frac{d}{v_0\, t_2}\right)^2 + \left(\frac{g\, t_2}{2 v_0}\right)^2 = 1 \text{, resp. } \left(\frac{d}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{g\, t_2^2}{2 v_0}\right)^2 = t_2^2 . \qquad (6)$$

Odčítaním rovníc (5) a (6) vylúčime neznámu d

$$\left(\frac{g}{2 v_0}\right)^2 \left[\left(t_1^2\right)^2 - \left(t_2^2\right)^2\right] = t_1^2 - t_2^2 ,$$

odkiaľ máme

$$v_0 = \frac{g}{2}\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \approx 16{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad (7)$$ 4 b

b) Po dosadení (7) do (5) určíme vzdialenosť dopadu

$$d = t_1 \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{g\, t_1}{2}\right)^2} = \frac{g\, t_1\, t_2}{2} \approx 24{,}5\ \mathrm{m}.$$ 2 b

c) Uhly α_1 a α_2 určíme z (1) a (3) s použitím predchádzajúcich výsledkov

$$\cos\alpha_1 = \frac{d}{v_0\,t_1} = \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}$$, odkiaľ $\alpha_1 \approx 35{,}0°$. 2 b

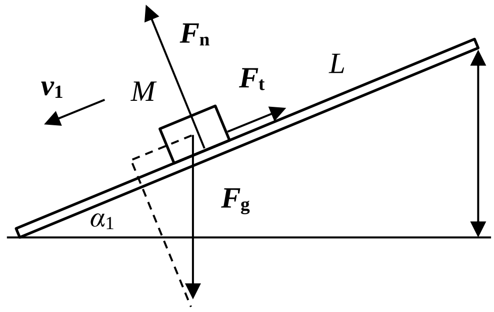
rovnako

$$\cos\alpha_2 = \frac{d}{v_0\,t_2} = \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}$$, odkiaľ $\alpha_1 \approx 55{,}0°$. 2 b

2. Vzduchovka

Riešenie:

a) Na hranol pôsobia sily: $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\mathbf{g}$ tiažová, tlaková sila $\boldsymbol{F}_\mathbf{n}$ podložky a trecia sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ v smeroch uvedených na obr. RC–1.



Obr. RC–1

b) Ak je pohyb rovnomerný (nulové zrýchlenie), výslednica $\boldsymbol{F}$ vonkajších síl pôsobiacich na hranol je nulová. To znamená, že je nulová normálová, aj tangenciálna zložka výslednice $\boldsymbol{F}$ a dostaneme

$$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{g} \cos\alpha_1 \quad \text{a} \quad F_\mathrm{t} = F_\mathrm{g} \sin\alpha_1 ,$$

kde $\sin\alpha_1 = \dfrac{h_1}{L}$ a $\cos\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{L^2 - h_1^2}}{L}$. obrázok 2 b

Veľkosť trecej sily $F_\mathrm{t} = f\, F_\mathrm{n}$. opis síl 2 b

Z uvedených vzťahov určíme faktor trenia

$$f = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{h_1}{\sqrt{L^2 - h_1^2}} \approx 0{,}37.$$ 2 b

c) Pre nepružnú zrážku strely s hranolom platí zákon zachovania hybnosti

$$m v_0 = (M + m) v_2 ,$$

kde v_2 je rýchlosť hranola so strelou tesne po zrážke a zároveň začiatočná rýchlosť pohybu hranola smerom nahor po naklonenej rovine.

Na hranol pôsobia sily rovnakého typu ako v prvom prípade, iba smer sily trenia je opačný. Všetky sily sú konštantné, preto ide o pohyb rovnomerne zrýchlený (so záporným zrýchlením).

Pohybová rovnica má tvar

$$(M + m)\, a = -F_{\mathrm{g}2} \sin\alpha_2 - F_{\mathrm{t}2} ,$$

kde $F_{\mathrm{t}2} = f\, F_{\mathrm{n}2} = f\, F_\mathrm{g} \cos\alpha_2$ a $\sin\alpha_2 = \dfrac{h_2}{L}$ a $\cos\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{L^2 - h_2^2}}{L}$.

S uvážením týchto vzťahov určíme zrýchlenie

$$a = -\frac{F_{\mathrm{g}2} \sin\alpha_2 + F_{\mathrm{t}2}}{M + m} = -\frac{(M+m) g \sin\alpha_2 + f\,(M+m) g \cos\alpha_2}{M + m}$$

a po dosadení za faktor f trenia

$$a = -g\left(\sin\alpha_2 + f \cos\alpha_2\right) = -g\,\frac{1}{L}\left(h_2 + h_1 \sqrt{\frac{L^2 - h_2^2}{L^2 - h_1^2}}\right).$$

Pre dráhu rovnomerne spomaleného pohybu do zastavenia máme

$$d = \frac{v_2^2}{-2a} = L\,\frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{1}{h_2 + h_1 \sqrt{\dfrac{L^2 - h_2^2}{L^2 - h_1^2}}} ,$$

a odkiaľ $$v_0 = \sqrt{2 g d}\left(\frac{M}{m} + 1\right)\sqrt{\frac{h_2}{L} + \frac{h_1}{L}\sqrt{\frac{L^2 - h_2^2}{L^2 - h_1^2}}} \approx 106\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$ 4 b

3. Hmotnostná tepelná kapacita

Riešenie:

a) V jednotke hmotnosti (resp. objemu) vody je akumulovaná značná energia, čo sa využíva pre transport tepla – horúcovody, diaľkové vykurovanie, ústredné kúrenie v bytoch.

Voda absorbuje značné teplo, čo sa využíva v chladičoch – chladenie motorov (napr. v automobiloch), chladenie reaktora v jadrovej elektrárni, chladiče v chemickom laboratóriu.
Pri dodávaní alebo odoberaní tepla sa mení teplota vody (najmä veľkého množstva vody) pomaly, tzn. vykazuje značnú teplotnú zotrvačnosť – 70 % povrchu Zeme predstavujú vodné plochy, čo stabilizuje teplotu povrchu Zeme napr. medzi dňom a nocou alebo zimou a letom (napr. na Sahare, kde je veľmi málo vody sú teplotné rozdiely medzi dňom a nocou veľmi veľké, na rozdiel od miest blízko pobrežia alebo riek a jazier). 2 b

b) Ak je začiatočný objem vody v termoske V_0, po rýchlom vložení valčeka s objemom V_A rovnaký objem vody s teplotou t_0 z termosky vytečie. V termoske tak zostáva voda s objemom $V_0 - V_A$ a valček s objemom V_A. Po ustálení výslednej teploty t_1 pre výmenu tepla medzi valčekom a vodou platí

$$\rho_V c_V (V_0 - V_A)(t_1 - t_0) = \rho_A c_A V_A (t_v - t_1). \qquad (1)$$

Pri druhom pokuse sa v termoske ustáli teplota t_2 a platí

$$\rho_V c_V (V_0 - 2V_A)(t_2 - t_0) = \rho_A c_A 2V_A (t_v - t_2). \qquad (2)$$

Ak odčítame druhú rovnicu od prvej, dostávame po úprave

$$c_A = c_V \frac{\rho_V}{\rho_A} \frac{1}{\frac{(t_v - t_1)}{(t_1 - t_0)} - \frac{2(t_v - t_2)}{(t_2 - t_0)}} \approx 905\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}. \qquad (3)$$ 3 b

$$p_1 = \frac{c_V}{c_A} \approx 4{,}6.$$

Hmotnostná tepelná kapacita vody je takmer 5× väčšia ako hliníka. 1 b

c) Pomer objemov určíme napr. z rovnice (1)

$$\frac{V_0}{V_A} = \frac{\rho_A c_A (t_v - t_1)}{\rho_V c_V (t_1 - t_0)} + 1$$

a po dosadení za c_{Al} z (3) po úprave dostaneme

$$p_2 = \frac{V_A}{V_0} = \frac{(t_v - t_2)(t_1 - t_0) - 2(t_v - t_1)(t_2 - t_0)}{(t_v - t_2)(t_1 - t_0) - (t_v - t_1)(t_2 - t_0)} \approx 0{,}156 = 15{,}6\ \%.$$ 4 b

alebo iná ekvivalentná úprava zlomku, napr.

$$\frac{V_A}{V_0} = \frac{(t_v - t_1)(t_2 - t_0) - 2(t_v - t_2)(t_1 - t_0)}{2(t_2 - t_1)(t_v - t_0)}$$ s rovnakým číselným výsledkom.

4. Elektrický obvod

Riešenie:

a) Ak je spínač vypnutý, je prúd zdroja

$$I_1 = \frac{U}{2R_1 + R_2}$$

a príkon sústavy 3×R_1

$$P_{11} = 2R_1 I_1^2 = \frac{2R_1}{\left(2R_1 + R_2\right)^2} U^2 .$$

Ak sa spínač zapne, je prúd zdroja

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + \dfrac{2R_1 R_1}{2R_1 + R_1}} = \frac{3U}{3R_2 + 2R_1}$$

a príkon sústavy 3×R_1

$$P_{12} = \frac{2R_1 R_1}{2R_1 + R_1} I_2^2 = \frac{6R_1}{\left(3R_2 + 2R_1\right)^2} U^2 .$$

Ak sa majú výkony rovnať, platí $P_{11} = P_{12}$, a po dosadení a úprave

$$R_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} R_1 \approx 289\ \Omega.$$ 4 b

b) Pre uvedený odpor R_2 dostávame pre oba stavy spínača

$$P_1 = \frac{3}{2\left(1+\sqrt{3}\right)^2} \frac{U^2}{R_1} \approx 0{,}12\ \mathrm{W}.$$ 2 b

Výkon zdroja pri vypnutom spínači

$$P_{Z1} = U I_1 = \frac{U^2}{2R_1 + R_2} = \frac{U^2}{2R_1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} R_1} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} \frac{U^2}{R_1} \approx 0{,}18\ \mathrm{W}$$ 2 b

a pri zapnutom spínači

$$P_{Z2} = U I_2 = \frac{3U^2}{3R_2 + 2R_1} = \frac{3}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} \frac{U^2}{R_1} \approx 0{,}32\ \mathrm{W}$$

Vidíme, že pri zapnutom spínači je výkon zdroja $P_{Z2} = \sqrt{3}\, P_{Z1}$. 2 b

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie C*

Autor návrhov úloh: Ľubomír Konrád

Recenzia a úprava úloh a riešení: Aba Teleki, Ľubomír Mucha, Ivo Čáp

Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021