62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória B – krajské kolo
Riešenie úloh

1. Guľôčka a rúrka

Riešenie:

a) Označíme v_0 začiatočnú rýchlosť guľôčky vzhľadom na podložku. Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy

$$m v_0 = M v_1 + m v_2 , \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

kde v_1 a v_2 sú rýchlosti rúrky a guľôčky po zrážke a platí $v_1 > v_2$.
Pre energiu platí

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + Q . \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

Posunutie guľôčky pri pohybe vo vnútri rúrky smerom k jej koncu $x_1 = L$ a po odraze sa guľôčka posunie o $x_2 = v_2\,\tau$, kde v_2 je rýchlosť guľky a po τ doba pohybu vo vnútri rúrky po odraze, pričom $\tau = L / (v_1 - v_2)$. Celkové posunutie guľôčky je

$$x = L + v_2\,\tau = L + v_2 \frac{L}{v_1 - v_2} = L \frac{v_1}{v_1 - v_2} . \qquad (3) \qquad 1\text{ b}$$

Pomocou (1) vylúčime rýchlosť v_1 rúrky $v_1 = \frac{m}{M}\left(v_0 - v_2\right)$.

Po dosadení do (3) dostávame

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{1}{1 + \frac{M}{m}\frac{x}{x - L}}$$

a dosadením do (2)

$$p_1 = 1 - \frac{M}{m}\frac{v_1^2}{v_0^2} - \frac{v_2^2}{v_0^2} = 1 - \frac{m}{M}\left(1 - \frac{v_2}{v_0}\right)^2 - \frac{v_2^2}{v_0^2}$$

$$p_1 = 1 - \frac{M}{m}\frac{v_1^2}{v_0^2} - \frac{v_2^2}{v_0^2} = 1 - \frac{m}{M}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{m}\frac{x}{x - L}}\right)^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{M}{m}\frac{x}{x - L}\right)^2}$$

a po úprave

$$p_1 = \frac{M\,x}{m} \frac{\left(\frac{M}{m} + 1\right) x - 2L}{\left(x - L + \frac{M}{m} x\right)^2} .$$

Pre dané hodnoty $p_1 \approx 0{,}90$. 2 b

b) Rýchlosť guľky vzhľadom na rúrku

$$v_2{}' = v_2 - v_1 = -\frac{L}{\left(1+\frac{M}{m}\right)x - L} v_0 .$$

Relatívna rýchlosť voči začiatočnej rýchlosti pred zrážkou

$$p_2 = \frac{v_2 - v_1}{v_0} = -\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{x}{L} - 1} .$$

Pre dané hodnoty $p_2 \approx -0{,}043$. 3 b

c) Pre dokonale pružnú zrážku (bez straty) $p_1 = 0$, a teda

$$\left(\frac{M}{m}+1\right)x - 2L = 0 \text{, odkiaľ } \left(\frac{x}{L}\right)_{\text{min}} = \frac{2m}{M+m} \approx 0{,}20.$$

V prípade dokonale nepružnej zrážky sa guľôčka neodrazí a pohybuje sa spolu s rúrkou Z toho vyplýva $\left(\frac{x}{L}\right)_{\text{max}} \to \infty$. 2 b

2. Guľôčka na kuželi

Riešenie:

a) Ak je guľôčka v pokoji, pôsobia na ňu tri sily: tiažová sila $\boldsymbol{F}_\text{g} = m\,\boldsymbol{g}$, ťahová sila nite $\boldsymbol{F}_\text{v}$ a tlaková sila kužeľa $\boldsymbol{F}_\text{n}$, obr. RB–1. Veľkosť F_v sily $\boldsymbol{F}_\text{v}$ je rovná veľkosti F ťahovej sily $\boldsymbol{F}$. Tieto sily sú v rovnováhe. Výslednice vodorovných a zvislých zložiek sú nulové.

$$F_\text{n} \cos\alpha - F_\text{v} \sin\alpha = 0 , \qquad (1)$$

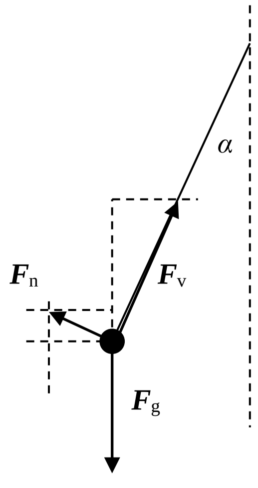
$$F_\text{n} \sin\alpha + F_\text{v} \cos\alpha = F_\text{g} . \qquad (2)$$

Z rovníc vylúčime silu F_n a dostávame vzťah pre silu ťahu vlákna

$$F_0 = F_\text{v} = \frac{m\,g}{\cos\alpha\left(\tan^2\alpha + 1\right)} = m\,g\cos\alpha \quad \approx 34 \text{ mN.}$$

2 b

Pozn.: Môžeme uvažovať aj tak, že výslednice priemetov síl do smeru vlákna a kolmo na smer vlákna sú nulové. Potom dostaneme priamo výsledok F = mg cosα.



Obr. RB–1

b) Keď sa guľôčka pohybuje po kružnici vo vodorovnej rovine, pôsobí vo vodorovnom smere navyše zotrvačná (odstredivá) sila a pre rovnováhu síl platí vzťah (2) a pre vodorovný smer

$$F_\mathrm{n}\cos\alpha - F_\mathrm{v}\sin\alpha + m\frac{v^2}{l_1\sin\alpha} = 0\,. \qquad (3)$$

V hraničnom prípade $F_\mathrm{n} = 0$.

$$-F_\mathrm{v}\sin\alpha + m\frac{v_\mathrm{m}^2}{l_1\sin\alpha} = 0 \quad \text{a} \quad F_\mathrm{v}\cos\alpha = F_\mathrm{g}\,,$$

odkiaľ dostávame

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{g\,l_1\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{g\,l_1\sin\alpha\tan\alpha} \approx 0{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad (4)$$ 3 b

Pozn.: Úlohu možno riešiť v inerciálnej sústave. Guľôčka sa pohybuje po kružnici s polomerom $r = l_1 \sin\alpha$ *vo vodorovnej rovine, pričom guľôčka má dostredivé zrýchlenie* v^2/r. *Vo vodorovnej rovine na guľôčku pôsobia sily* $F_\mathrm{n}\cos\alpha$ a $-F_\mathrm{v}\sin\alpha$. *Pohybová rovnica má tvar*

$$ma = -m\frac{v^2}{l_1\sin\alpha} = F_\mathrm{n}\cos\alpha - F_\mathrm{v}\sin\alpha\,,$$ *čo zodpovedá rovnici (3).*

c) Keďže $v_1 < v_\mathrm{m}$, z rovníc (2) a (3) dostávame

$$F_1 = F_{\mathrm{v}1} = \frac{m}{l_1}\,\frac{g\,l_1\cos\alpha + v_1^2}{\cos^2\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)} = m\,g\cos\alpha + \frac{m v_1^2}{l_1} \approx 39\ \mathrm{mN}.$$ 2 b

d) Keď ťaháme za niť a skracujeme dĺžku l nite medzi guľôčkou a vrcholom, sila F_v koná prácu

$$W = \int_0^{l_1-l_2} F_\mathrm{v}\,\mathrm{d}x\,,$$

ktorá sa prejaví zvýšením kinetickej energie guľôčky, a teda jej rýchlosti.
Keďže F_v leží v zvislej rovine obsahujúcej os kužeľa, jej moment vzhľadom na os je nulový. Z toho vyplýva, že moment hybnosti guľôčky vzhľadom na os sa zachováva

$$m v_1\,l_1\sin\alpha = m v_2\,l_2\sin\alpha\,,$$

odkiaľ dostávame

$$v_2 = v_1\frac{l_1}{l_2}\,.$$

Ak uvážime výsledok (4) pre medznú rýchlosť, v tomto prípade dostávame pre medznú rýchlosť vzťah

$$v_2 = \sqrt{g\,l_2\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}\,, \text{ kde } v_2 = v_1\frac{l_1}{l_2}\,,$$

odkiaľ máme

$$v_1\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{g\,l_2\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}\,, \text{ a teda } l_2 = \sqrt[3]{\frac{v_1^2\,l_1^2}{g}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} \approx 15\ \mathrm{cm}.$$ 3 b

3. Tepelný dej

Riešenie:

a) V začiatočnom stave A je tlak

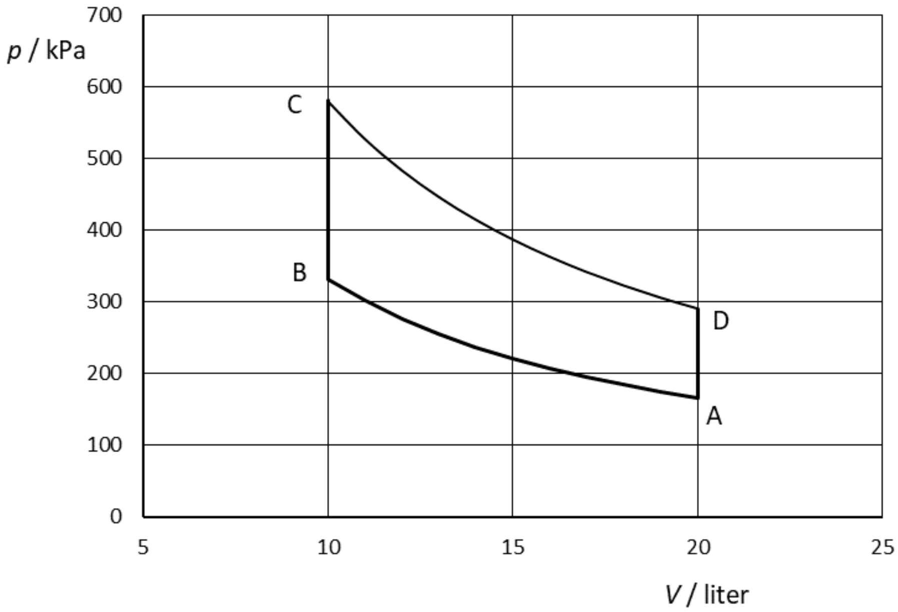
$$p_\mathrm{A} = p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} \approx 166\ \mathrm{kPa}$$

V ďalších uzloch cyklu je tlak plynu

$$p_\mathrm{B} = \frac{p_\mathrm{A} V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{B}} = 2\,p_1,\ \ p_\mathrm{C} = \frac{T_\mathrm{C}}{V_\mathrm{C}}\frac{p_\mathrm{A} V_\mathrm{A}}{T_\mathrm{A}} = 2\,\frac{T_2}{T_1}\,p_1,\ \ p_\mathrm{D} = \frac{p_\mathrm{C} V_\mathrm{C}}{V_\mathrm{D}} = \frac{1}{2}\,p_\mathrm{C} = \frac{T_2}{T_1}\,p_1\,.$$

Pre dané hodnoty p_B = 332 kPa, p_C = 581 kPa, $p_\mathrm{D} \approx$ 291 kPa. 1 b

Obr. RB–2



Obr. RB–2 2 b

b) Práca sa koná počas izotermických dejov, pričom práca je rovná zmene vnútornej energie.

Fáza AB:

$$W_\mathrm{AB} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} p\,\mathrm{d}V = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{p_\mathrm{A} V_\mathrm{A}}{V}\,\mathrm{d}V = p_\mathrm{A} V_\mathrm{A}\,\ln\frac{V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{A}} = -\,p_1 V_1 \ln 2\,,$$

fáza CD:

$$W_\mathrm{CD} = \int_\mathrm{C}^\mathrm{D} p\,\mathrm{d}V = \int_\mathrm{C}^\mathrm{D} \frac{p_\mathrm{C} V_\mathrm{C}}{V}\,\mathrm{d}V = p_\mathrm{C} V_\mathrm{C}\,\ln\frac{V_\mathrm{D}}{V_\mathrm{C}} = \frac{T_2}{T_1}\,p_1 V_1 \ln 2\,.$$

Celková vykonaná práca počas deja

$$W = W_\mathrm{AB} + W_\mathrm{CD} = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) p_1 V_1 \ln 2\,.$$

Plyn prijíma z okolia teplo počas fáz BC a CD. Vo fázach AB a DA teplo odovzdáva do okolia.

$$Q_\mathrm{BC} = \Delta U_\mathrm{BC} = nC_V\left(T_2 - T_1\right) = \frac{nR}{\kappa - 1}\left(T_2 - T_1\right),$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = \frac{T_2}{T_1} p_1 V_1 \ln 2 .$$

Účinnosť deja

$$\eta = \frac{W}{Q_{BC} + Q_{CD}} = \frac{(T_2 - T_1)\ln 2}{\frac{1}{\kappa - 1}(T_2 - T_1) + T_2 \ln 2} \approx 0{,}168 = 16{,}8\ \%.$$ 3 b

c) Na rozdiel od pôvodného deja sú fázy BC a DA adiabatické, pre ktoré platí stavová rovnica adiabatického deja

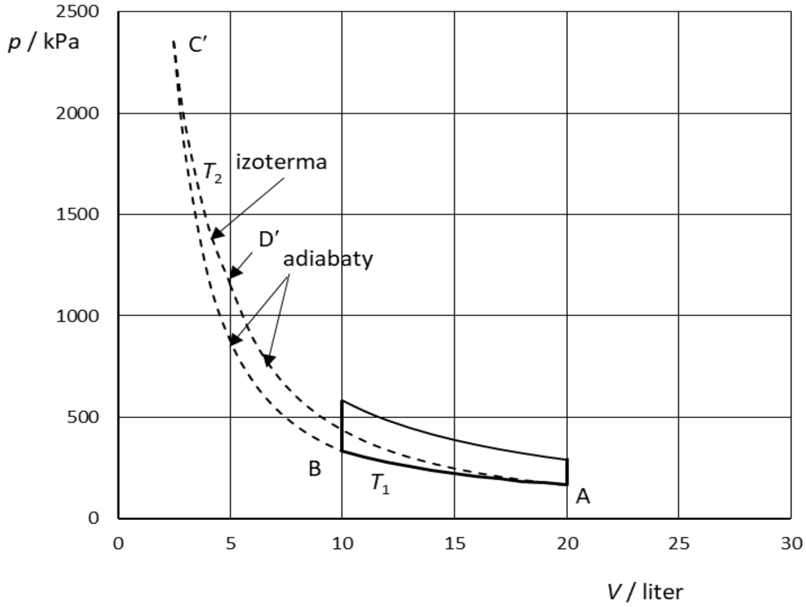
$$T_B V_B^{\kappa-1} = T_{C'} V_{C'}^{\kappa-1} \quad \text{a} \quad T_{D'} V_{D'}^{\kappa-1} = T_A V_A^{\kappa-1},$$

odkiaľ máme

$$V_3 = V_{C'} = \left(\frac{T_B}{T_{C'}}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} V_B = \frac{V_1}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \approx 2{,}47\ \text{l},$$

$$V_4 = V_{D'} = V_A \left(\frac{T_A}{T_{D'}}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \approx 4{,}94\ \text{l}.$$

Doplnený diagram adiabatického deja, obr. RB–3



Obr. RB-3 2 b

d) Účinnosť Carnotovho cyklu

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} \approx 0{,}43 = 43\ \%.$$

Pomer účinností

$$\frac{\eta_C}{\eta} = 1 + \frac{1}{(\kappa - 1)\ln 2}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \approx 2{,}55.$$

Účinnosť pôvodného deja je 39 % účinnosti Carnotovho cyklu pri rovnakých teplotách. 2 b

4. Zohrievanie vodiča

Riešenie:

a) Teplotu vodiča ovplyvňuje napr.: prechádzajúci prúd, rezistivita vodiča, priemer vodiča, vonkajšia teplota, izolácia vodiča, okolité prostredie, vynútené chladenie, veľkosť povrchu, odrazivosť povrchu a pod.

Tieto faktory možno ovplyvňovať za účelom znižovania teploty pre uvedené faktory:
znižovanie prechádzajúceho prúdu, voliť materiál s čo najmenšou rezistivitou, zväčšovať priemer vodiča, udržiavať nízku teplotu okolia vodiča, používať čo najtenšiu izolačnú vrstvu (bežne bužírka, u náročnejších aplikácií smalt, napr. v transformátoroch), okolité médium s väčšou tepelnou vodivosťou a tepelnou kapacitou (chladenie vzduchom alebo olejom), účinnosť chladenia sa zvyšuje prúdením okolitého média (napr. chladenie procesora počítača ventilátorom), teplo sa odvádza z povrchu, a teda je žiadúci čo najväčší povrch (napr. chladenie pridaným rebrovaným chladičom), časť tepla sa odvádza sálaním, ktoré je účinnejšie z povrchov s čo najmenšou odrazivosťou, a pod.. 2 b

b) Hmotnosť vodičov

$$m = \rho V = \rho \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 l_1 = \rho \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 l_2 \text{, odkiaľ } \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 .$$

Obsah valcového povrchu vodičov

$$S_1 = \pi\, d_1\, l_1,\ S_2 = \pi\, d_2\, l_2 .$$

Pomer obsahov povrchu

$$p_1 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1\, l_1}{d_2\, l_2} = \frac{d_2}{d_1} \approx 2{,}0.$$ 2 b

c) Tepelný výkon vo vodiči

$$P = R\, I^2 = \frac{\rho_{\mathrm{R}}\, l}{S_\perp} I^2 = \rho_{\mathrm{R}} \frac{4l}{\pi d^2} I^2 .$$

Pomer výkonu vo vodičoch

$$p_2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_{\mathrm{R}} \dfrac{4l_1}{\pi d_1^2} I^2}{\rho_{\mathrm{R}} \dfrac{4l_2}{\pi d_2^2} I^2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 \approx 16.$$ 2 b

Podstatne väčší je tepelný výkon v tenšom drôte než v hrubom drôte.

d) Tepelný výkon vodiča v ustálenom stave sa odvádza povrchom do okolia. Uplatňujú sa dva fyzikálne deje – prestup tepla a sálanie tepla.

Pre voľnú konvekciu (prestup rozhraním kov-vzduch bez vynúteného prúdenia vzduchu) platí vzťah

$$q_{\mathrm{K}} = \alpha_{\mathrm{T}}\, \Delta t .$$

Pre sálanie platí Stefanov-Boltzmannov zákon

$$q_{\mathrm{E}} = \alpha_{\mathrm{r}}\, \sigma \left(T^4 - T_0^4\right) = \alpha_{\mathrm{r}}\, \sigma \left[\left(T_0 + \Delta T\right)^4 - T_0^4\right] =$$

$$= \alpha_{\mathrm{r}}\, \sigma \left[\left(T_0^4 + 4T_0^3\, \Delta T + 6T_0^2\, \Delta T^2 + 4T_0 \Delta T^3 + \Delta T^4\right) - T_0^4\right] \approx 4\alpha_{\mathrm{r}}\, \sigma T_0^3\, \Delta T,$$

kde $\Delta T = \Delta t$. Hľadaný pomer je

$$p_4 = \frac{q_K}{q_S} = \frac{\alpha_T}{\alpha_r \sigma T_0^3} \approx 6{,}1. \qquad 2\text{ b}$$

Z výsledku je zrejmé, že pri chladení povrchu pri teplote blízkej izbovej teplote 20 °C je dôležitejšia konvencia. Chladenie sálaním sa podstatne prejaví najmä pri vysokých teplotách.

Výsledná hustota tepelného toku povrchom vodiča $q = q_K + q_E$. Tepelný výkon generovaný vo vodiči v ustálenom stave sa rovná výkonu odvedenému povrchom

$$P = R\,I^2 = q\,S = \left(\alpha_T + \alpha_r \sigma T_0^3\right) S\,\Delta t$$

a po dosadení

$$p_3 = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{R_1 S_2}{R_2 S_1} = \frac{S_{\perp 2} l_1}{S_{\perp 1} l_2} \frac{\pi d_2 l_2}{\pi d_1 l_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 = 8{,}0. \qquad 2\text{ b}$$

Tenký vodič sa daným prúdom zohreje 8-krát viac ako hrubší.

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (1, 2, 4), Kamil Bystrický (3)
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha, Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021