62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória A – krajské kolo
Riešenie úloh

1. Hod loptičky cez strechu

Riešenie:

a) Pre prechod bodom A máme

$$y_A = h_2 - h_1 = v_0 t_A \sin\varphi - \frac{1}{2} g t_A^2 , \tag{1}$$

$$x_A = \frac{h_2 - h_1}{\tan\alpha} = v_0 t_A \cos\varphi , \tag{2}$$

$$y_C = 0 = v_0 t_C \sin\varphi - \frac{1}{2} g t_C^2 , \tag{3}$$

$$x_C = \left(h_2 - h_1\right)\left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}\right) = v_0 t_C \cos\varphi . \tag{4}$$

Z rovníc (1) a (2) vylúčime čas t_A a z (3) a (4) čas t_C

$$y_A = \frac{x_A}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\frac{x_A}{\cos\varphi}\right) \tag{5}$$ 1 b

$$y_C = \frac{x_C}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\frac{x_C}{\cos\varphi}\right).$$ 1 b

Odtiaľ máme

$$\frac{\sin\varphi}{x_A} - \frac{y_A}{x_A^2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\frac{1}{\cos\varphi} \quad \text{a} \quad \frac{\sin\varphi}{x_C} - \frac{y_C}{x_C^2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\frac{1}{\cos\varphi} .$$

Porovnaním ľavých strán dostávame pre začiatočný uhol vrhu

$$\tan\varphi = \frac{y_A x_C^2 - y_C x_A^2}{x_A x_C \left(x_C - x_A\right)} = \tan\alpha + \tan\beta .$$ 1 b

Pre dané hodnoty $\varphi \approx 57{,}6°$. 0,5 b

Dosadením do rovnice (5) dostaneme začiatočnú rýchlosť vrhu

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\, x_A}{2}\frac{1+\tan^2\varphi}{\left(\tan\varphi - \dfrac{y_A}{x_A}\right)}} = \sqrt{g\left(h_2 - h_1\right)}\sqrt{\frac{1+\left(\tan\alpha + \tan\beta\right)^2}{2\tan\alpha\tan\beta}} .$$ 1 b

Pre dané hodnoty $v_0 \approx 12{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 0,5 b

b) Ak je začiatočná rýchlosť v zvislom smere $v_0 \sin\varphi$, je maximálna výška trajektórie

$$h_m = h_1 + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g} = h_1 + \frac{1}{2}\left(h_2 - h_1\right)\frac{\left(\tan\alpha + \tan\beta\right)^2}{2\tan\alpha\tan\beta} .$$ 1 b

Pre dané hodnoty $h_m \approx 7{,}40$ m. 0,5 b

Z obrázku A–1 vyplýva, že pre $\alpha < \beta$ je vrchol trajektórie pred bodom A, a teda vrchol A strechy je na zostupnej časti trajektórie. Je zrejmé, že pre $\alpha > \beta$ je situácia opačná a vrchol A strechy je na vzostupnej časti trajektórie. V oboch prípadoch je $h_m > h_A = h_1 + h_2$.
Ak je $\alpha = \beta$, je vrchol trajektórie totožný s vrcholom A strechy a $h_m = h_A$, čo je najmenšia hodnota výšky h_m. 3 x 0,5 b

c) Čas t_A určíme najjednoduchšie z rovnice (2)

$$t_A = \frac{1}{v_0 \cos\varphi}\frac{h_2 - h_1}{\tan\alpha} = \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g}\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}$$

. Pre dané hodnoty $t_A \approx 1{,}36$ s. 2 b

2. Guľôčka na valcovej stene

Riešenie:

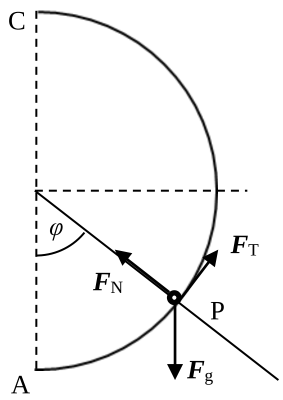
a) Obr. RA–1 a opis síl 2 b

V inerciálnej vzťažnej sústave pôsobia na guľôčku iba sila tiažová $\boldsymbol{F}_g$, tlaková sila podložky $\boldsymbol{F}_N$ a sila trenia medzi guľôčkou a stenou $\boldsymbol{F}_T$, ktorá spomaľuje rotáciu guľôčky.
Pohyb v bode P je spomalený s tangenciálnym zrýchlením

$$a_t = \frac{1}{m}\left(F_T - F_g \sin\varphi\right) < 0 .$$ 1 b

Guľôčka sa pohybuje po kružnicovej trajektórii s normálovým (dostredivým) zrýchlením

$$a_n = -\frac{v^2}{R} = \frac{1}{m}\left(F_g \cos\varphi - F_N\right) < 0 .$$ 1 b



Obr. RA–1

b) Pri valivom pohybe nedochádza k stratám mechanickej energie a platí zákon zachovania mechanickej energie medzi bodmi A a C

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\omega_C^2 + mg\,2R , \tag{1}$$

kde $J = \frac{2}{5}mr^2$, $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$ a $\omega_C = \frac{v_C}{r}$.

Odtiaľ dostávame

$$v_C^2 = v_0^2 - \frac{20}{7}gR . \tag{2}$$ 1 b

Guľôčka zostáva v kontakte so stenou až do bodu C, ak je počas pohybu tlaková sila valcovej steny kladná. V bode C je

$$F_N = m\frac{v_C^2}{R} - mg \geq 0 . \tag{3}$$ 1 b

Po dosadení (2) do (3) dostávame

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{27}{7}gR} = v_{0m} , \tag{4}$$

pre dané hodnoty $v_{0m} \approx 3{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

c) Z bodu C guľôčka pokračuje vodorovným vrhom so začiatočnou rýchlosťou v_C. Pre bod dopadu platí

$$x = v_C\, t_D \quad \text{a} \quad 2R = \frac{1}{2} g t_D^2 \text{, odkiaľ po vylúčení času dostávame}$$

$$x = \sqrt{\frac{4R}{g}}\, v_C \text{ a po dosadení z (2)}$$

$$x = R\sqrt{\frac{4v_0^2}{gR} - \frac{80}{7}}\,. \qquad 1\text{ b}$$

najmenšia hodnota vzdialenosti x je podľa podmienky (4)

$$x \geq 2R\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre $x = d$ dostávame

$$d = R\sqrt{\frac{4v_{01}^2}{gR} - \frac{80}{7}}\text{, odkiaľ } \; v_{01} = \frac{1}{2}\sqrt{gR}\sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2 + \frac{80}{7}}\,.$$

Pre dané hodnoty $v_{01} \approx 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

3. Vodivá slučka v magnetickom poli

Riešenie:

a) Frekvencia kmitov slučky okolo osi je určená momentom zotrvačnosti J slučky a torznou tuhosťou k vlákna $\omega = \sqrt{\frac{k}{J}}$.

Moment zotrvačnosti $J = m\frac{2a}{2(a+b)}\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m\frac{2b}{2(a+b)}b^2 = \frac{m}{a+b}\left(\frac{b}{2}\right)^2\left[a + \frac{b}{3}\right]$.

(*pre dané hodnoty* $J \approx 1{,}83 \cdot^{-6}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$)

Torzná tuhosť je daná vzťahom pre moment sily $M = -k\alpha$.

Torzná tuhosť závesu slučky

$$k = J\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{m}{a+b}\left(\frac{b}{2}\right)^2\left[a + \frac{b}{3}\right].$$

Pre dané hodnoty $k \approx 5{,}02 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N \cdot m}$. 3 b

b) Ak sa zapne spínač, slučkou prechádza vybíjací prúd I, pričom na vodiče rovnobežné s osou sústavy pôsobí moment sily $M = 2F\frac{b}{2} = 2BIa\frac{b}{2}$. Keďže vybíjanie je veľmi rýchle, počas vybíjania sa slučka z rovnovážnej polohy prakticky nevychýli, ale nadobudne začiatočnú uhlovú rýchlosť.

Moment sily magnetického poľa na vodiče slučky s prúdom I rovnobežné s osou sústavy udelí slučke moment hybnosti L. Keďže moment sa v dôsledku premenného prúdu I s časom mení, určíme moment hybnosti integráciou momentu sily v čase

$$L = \int_0^\tau M \,\mathrm{d}t = Bab\int_0^\tau I \,\mathrm{d}t = BabQ = BabCU \quad ,$$

kde $Q = C\,U$ je celkový náboj kondenzátora. Závit tak získa počiatočnú uhlovú rýchlosť $\Omega_\mathrm{m} = \dfrac{L}{J} = \dfrac{BabCU}{J}$ a kinetickú energiu $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} J\,\Omega_\mathrm{m}^2$.

Pozn.: Na základe predpokladu zo zadania uvažujeme vybitie kapacitora na nulové napätie.

Keďže v sústave pôsobia iba konzervatívne deformačné sily vlákna (vplyv rozptylu energie indukovaným prúdom neuvažujeme), platí zákon zachovania mechanickej energie, a teda kinetická energia na začiatku sa rovná potenciálnej energii v okamihu zastavenia pri maximálnej výchylke

$$\frac{1}{2} J\,\Omega_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2} k\,\alpha_\mathrm{m}^2 ,$$

odkiaľ máme $\alpha_\mathrm{m} = \sqrt{\dfrac{J}{k}}\,\Omega_\mathrm{m} = \dfrac{\Omega_\mathrm{m}}{\omega} = \dfrac{BabCU}{J\,\omega} = \dfrac{BCUT}{2\pi m}\,\dfrac{12a(a+b)}{b(3a+b)}$.

Pre dané hodnoty $\alpha_\mathrm{m} \approx 6{,}4°$. 3 b

c) Pri pohybe slučky kolmo na smer magnetického poľa sa vo vodičoch kolmých na smer magnetického poľa indukuje napätie

$$U_\mathrm{i} = 2Bav = 2Ba\Omega\frac{b}{2} .$$

Maximálna hodnota indukovaného napätia je v okamihu nadobudnutia maximálnej uhlovej rýchlosti Ω_m

Pomer napätí je vtedy

$$p = \frac{U_\mathrm{im}}{U} = 2Ba\,\Omega_\mathrm{m}\frac{b}{2} = 2Ba\frac{BabCU}{J}\frac{b}{2} = \frac{12a^2(a+b)}{(3a+b)}\,\frac{B^2C}{m} .$$

Pre dané hodnoty $p \approx 4{,}4\cdot10^{-5}$. 3 b

Predpoklad zanedbateľne malého indukovaného napätia je oprávnený. 1 b

4. RC mostík

Riešenie:

a) Ide o dva nezaťažené deliče napätia. Napätie $\boldsymbol{U}_2$ je rozdiel napätí v uzloch 1 a 2

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1 \left[\frac{R_\mathrm{N}}{R_\mathrm{N} + R_\mathrm{c} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{c}} - \frac{R}{R + R_\mathrm{N}\left(1 + \mathrm{j}\omega C R\right)} \right],$$

odkiaľ máme po úprave

$$\boldsymbol{A}_U = \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1} = \frac{\left(R_\mathrm{N}^2 - R R_\mathrm{c}\right) + \mathrm{j}\omega R\left(C R_\mathrm{N}^2 - L_\mathrm{c}\right)}{\left(R_\mathrm{N} + R_\mathrm{c} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{c}\right)\left[R + R_\mathrm{N} + \mathrm{j}\omega C R R_\mathrm{N}\right]}.$$ 3 b

b) Prenos je nulový, ak je nulový čitateľ, a teda jeho reálna i imaginárna časť

$$R_\mathrm{c} = \frac{R_\mathrm{N}^2}{R} \quad \text{a} \quad L_\mathrm{c} = R_\mathrm{N}^2\, C.$$ 2 b

c) Pre dané hodnoty sú parametre cievky: $L_\mathrm{c} \approx 150\ \mu\mathrm{H}$, $R_\mathrm{c} \approx 40{,}0\ \Omega$ a $Q \approx 23{,}6$. 2 b

d) Celkový prúd zdroja je súčtom prúdov paralelnými vetvami mostíka

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{U}_1 \frac{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1 \boldsymbol{Z}_2} = \boldsymbol{U}_1 \frac{R_\mathrm{N} + \dfrac{R}{1 + \mathrm{j}\omega R C} + R_\mathrm{c} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{c} + R_\mathrm{N}}{\left(R_\mathrm{N} + \dfrac{R}{1 + \mathrm{j}\omega R C}\right)\boldsymbol{Z}_2}$$

a po úprave a dosadení podmienok vyváženia dostávame

$\boldsymbol{I} = \dfrac{\boldsymbol{U}_1}{R_\mathrm{N}}$, a teda $I = \dfrac{U_1}{R_\mathrm{N}}$. Pre dané hodnoty $I = 12$ mA. 3 b

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie A*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (1, 2), Ivo Čáp (3, 4)
Recenzia a úprava úloh a riešení: Ľubomír Mucha, Aba Teleki, Ivo Čáp
Redakcia: Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021