62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória C – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Barón Prášil

Riešenie:

a) Ide o šikmý vrh, pre ktorý platí

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g\,t \qquad (1)$$

$$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad y = h_0 + v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 . \qquad (2)$$

Pre bod dopadu gule $y = 0$ a $x = d_0$. Dosadíme do (2)

$$d = v_0\, t_\mathrm{d} \cos\alpha \qquad 0 = h_0 + v_0\, t_\mathrm{d} \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t_\mathrm{d}^2 .$$

$$v_0 = \frac{d_0}{2\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h_0 + d_0 \tan\alpha}} . \qquad (3) \qquad 3\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $v_0 \approx 87\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 1 b

b) Ak by sa barónovi podarilo naskočiť na vystrelenú guľu, zachovala by sa hybnosť sústavy guľa–barón

$$m v_0 = (M+m) v_0^* ,\ \text{resp.}\ v_0^* = \frac{m}{M+m} v_0 . \qquad (4) \qquad 2\text{ b}$$

Guľa s barónom by sa pohybovala pod uhlom α so začiatočnou rýchlosťou v_0^*.

Pre miesto dopadu máme $y = 0$, $x = x_\mathrm{D}$ a podľa upravenej rovnice (2) platí

$$x_\mathrm{D} = v_0^*\, t_\mathrm{D} \cos\alpha \qquad 0 = h_0 + v_0^*\, t_\mathrm{D} \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t_\mathrm{D}^2 .$$

Čas t_D letu gule s barónom určíme z rovnice

$$t_\mathrm{D}^2 - 2\frac{v_0^*}{g} t_\mathrm{D} \sin\alpha - \frac{2h_0}{g} = 0 ,\ \text{odkiaľ}\ t_\mathrm{D} = \frac{v_0^*}{g}\sin\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^*}{g}\sin\alpha\right)^2 + \frac{2h_0}{g}} .$$

Fyzikálny zmysel má riešenie so znamienkom „+“ (pre $t_\mathrm{D} > 0$). Po dosadení z (4) a (5)

$$x_\mathrm{D} = v_0^*\, t_\mathrm{D} \cos\alpha = \frac{m}{M+m} v_0 \cos\alpha \left[\frac{m}{M+m}\frac{v_0}{g}\sin\alpha + \sqrt{\left(\frac{m}{M+m}\frac{v_0}{g}\sin\alpha\right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \right] . \qquad 2\text{ b}$$

Hmotnosť gule

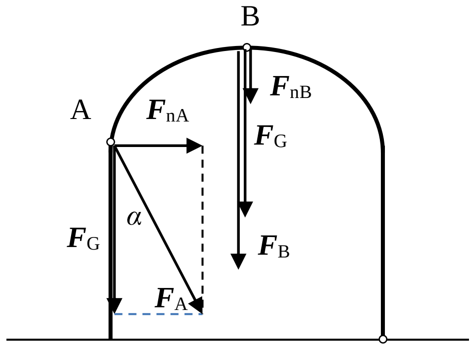
$$m = \frac{1}{6}\pi D^3 \rho ,\ \text{kde}\ \rho = 7{,}8\times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}\ \text{je hustota železa.}$$

Pre dané hodnoty $m \approx 32{,}7$ kg, $x_\mathrm{D} \approx 109$ m a $a = d_0 - x_\mathrm{D}$. $a \approx 691$ m. 2 b

2. Moskovské metro

Riešenie:

a) V bode A oblúka pôsobí na mincu tiažová sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = m\,\boldsymbol{g}$ v zvislom smere. Po prechode na oblúk v bode A pôsobí na mincu tlaková sila oblúka $\boldsymbol{F}_\mathrm{nA}$, ktorá minci udeľuje dostredivé zrýchlenie



Obr. RC–1

$$a_\mathrm{nA} = \frac{F_\mathrm{nA}}{m} = \frac{v_\mathrm{A}^2}{r_\mathrm{A}}\,.$$

Pri prechode mince bodom B oblúka pôsobia na mincu tiažová sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a tlaková sila oblúka $\boldsymbol{F}_\mathrm{nB}$ kolmo na smer pohybu zvislo nadol. Súčet týchto síl udeľuje minci dostredivé zrýchlenie

$$a_\mathrm{nB} = \frac{F_\mathrm{nB} + F_\mathrm{G}}{m} = \frac{v_\mathrm{B}^2}{r_\mathrm{B}}\,. \qquad (2)$$

Obr. RC–1 a sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ 2 b

b) Podmienka kontaktu mince pri prechode bodom B je $\boldsymbol{F}_\mathrm{nB} \geq 0$. Z rovnice (2) dostávame

$$F_\mathrm{nB} = m\frac{v_\mathrm{B}^2}{r_\mathrm{B}} - m\,g \geq 0\,, \text{ a teda } \; v_\mathrm{B} \geq \sqrt{r_\mathrm{B}\,g}\,. \qquad (3) \qquad 1\text{ b}$$

Ak minca prejde bodom B, pokračuje po symetrickej časti oblúka až po stĺp a pozdĺž neho do bodu C.

Keďže neuvažujeme trenie medzi mincou a oblúkom, mechanická energia sa zachováva

$$m\,g\,h_0 + \frac{1}{2}m v_0^2 = m\,g\,h + \frac{1}{2}m v^2\,. \qquad (4) \qquad 2\text{ b}$$

Rýchlosť mince v bode B je

$$v_\mathrm{B} = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(H - h_0\right)}\,. \qquad (5)$$

Z podmienky (3) dostávame

$$v_0 \geq \sqrt{\left[2\left(H - h_0\right) + r_\mathrm{B}\right]g} = v_\mathrm{0m}\,. \qquad (6) \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $v_\mathrm{0m} \approx 8{,}34\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 1 b

c) Pri priamočiarom pohybe po povrchu stĺpa má zrýchlenie $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ zvislý smer nadol. Pri prechode na zakrivený povrch oblúka začne pôsobiť na mincu tlaková sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{nA}$ kolmá na smer pohybu.

Pre v_0m určíme z rovnice (4) rýchlosť mince v bode A

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(h_\mathrm{A} - h_0\right)}$$

a z (1) dostredivé zrýchlenie

$$a_\mathrm{nA} = \frac{v_0^2 - 2g\left(h_\mathrm{A} - h_0\right)}{r_\mathrm{A}}\,.$$

Výsledné zrýchlenie $\boldsymbol{a}_\mathrm{A} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}_\mathrm{nA}$ zviera so zvislým smerom uhol α, pre ktorý máme

$$\tan\alpha = \frac{a_\mathrm{nA}}{g} = \frac{v_\mathrm{0m}^2 - 2g\left(h_\mathrm{A} - h_0\right)}{r_\mathrm{A}\,g} = \frac{2\left(H - h_\mathrm{A}\right) + r_\mathrm{B}}{r_\mathrm{A}}\,. \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $\alpha \approx 75{,}7°$. 1 b

3. Zrážka strely s guľou

Riešenie:

a) <u>V prvom prípade</u> strela preletela cez guľu.

Zrážka je nepružná, a preto $Q > 0$.
Podľa zákona zachovania hybnosti

$$mv = m\frac{v}{2} + MV \text{, kde } V \text{ je rýchlosť gule po zrážke.}$$

Odtiaľ máme

$$V = \frac{m}{M}\frac{v}{2}. \qquad \text{1 b}$$

Rýchlosť gule je menšia ako rýchlosť strely po zrážke,
odkiaľ máme podmienku $0 < m < M$. (1)

Teplo Q určíme zo zachovania energie v sústave. Kinetická energia sústavy po zrážke

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mv^2\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Uvoľnené teplo

$$Q = E_{\mathrm{k}0} - E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{8}mv^2\left(1+\frac{m}{M}\right) = \frac{1}{8}mv^2\left(3-\frac{m}{M}\right). \qquad \text{1 b}$$

Pomer $p = \dfrac{Q}{E_{\mathrm{k}0}} = \dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{m}{M}\right)$. 1 b

Na základe podmienky (1) máme $\dfrac{1}{2} < p < \dfrac{3}{4}$. 1 b

<u>V druhom prípade</u> strela do telesa nevnikla a po zrážke sa pohybuje v pôvodnom smere s polovičnou rýchlosťou.
Zo zákona zachovania hybnosti máme

$$mv = m\frac{v}{2} + MV \text{, pričom } V = \frac{m}{2M}v \geq \frac{v}{2}, \qquad \text{1 b}$$

odkiaľ dostávame podmienku $\dfrac{m}{M} \geq 1$. (2)

Uvoľnené teplo

$$Q = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}m\frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}MV^2\right) = \frac{1}{8}mv^2\left(3-\frac{m}{M}\right).$$

Z podmienky $Q \geq 0$ dostávame $\dfrac{m}{M} \leq 3$. (3) 1 b

Hľadaný pomer $p = \dfrac{Q}{E_{\mathrm{k}0}} = \dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{m}{M}\right)$.

Z podmienok (2) a (3) dostávame

pre dané podmienky (3) a (4) $0 \leq p \leq \dfrac{1}{2}$. 1 b

Pre $p = 0$ ide o dokonale pružnú zrážku, ktorá nastane, ak $m = 3\,M$., pre $m = M$ je zrážka dokonale nepružná, pre ktorú $V = v/2$.

b) V prvom prípade, aby mohla strela preletieť guľou, musí byť guľa veľká v porovnaní so strelou. Materiál strely musí byť tuhý a gule mäkký, aby mohla strela do telesa preniknúť a preletieť ním. Ak podľa podmienky (1) pomer m / M je väčší, musí byť guľa z materiálu s podstatne menšou hustotou ako je hustota strely, napr. oceľová guľka a polystyrénová guľa. 0,5 b

V druhom prípade k prieniku do gule nedochádza, takže rozmery telies nie sú podstatné, ale telesá musia byť dostatočne tuhé. Takisto rýchlosť nesmie byť príliš veľká, aby sa telesá pri náraze nerozpadli. Ak chceme dosiahnuť pružnú alebo čiastočne pružnú zrážku, použijeme tuhý materiál, napr. olovo, oceľ alebo sklo. 0,5 b

c) Pre $q_1 = 0{,}50$ nastane prvý prípad.

$$p_1 = \frac{1}{4}\left(3 - q_1\right) \approx 0{,}63 = 63\,\% \text{ a } V_1 = v/4.$$ 0,5 b

Pre $q_2 = 1{,}0$ ide o druhý prípad a dokonale nepružnú zrážku

$p_2 = 0{,}50 = 50\,\%$ a $V_2 = v/2$. 0,5 b

Pre $q_3 = 2{,}0$ ide o druhý prípad s čiastočne nepružnou zrážkou

$$p_3 = \frac{1}{4}\left(3 - q_3\right) = 0{,}25 = 25\,\% \text{ a } V_3 = v.$$ 0,5 b

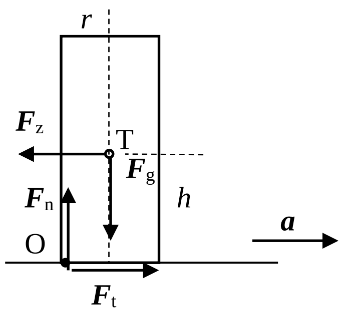
Pre $q_4 = 3{,}0$ ide o druhý prípad a dokonale pružnú zrážku

$p_4 = 0$ a $V_4 = (3/2)\, v$. 0,5 b

4. Ťažisko nádoby

Riešenie:

a) V okamihu zapnutia pohybu pásu sa pás pohybuje na krátku dobu zrýchleným pohybom so zrýchlením $\boldsymbol{a}$, na predmety na páse v tomto čase pôsobí zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z = -m\,\boldsymbol{a}$. Táto sila je kompenzovaná silou trenia $\boldsymbol{F}_t$. V zvislom smere pôsobí na fľašu tiažová sila $\boldsymbol{F}_g$ a tlaková sila podložky $\boldsymbol{F}_n$, obr. RC–2.



Obr. RC–2 1 b

Momenty M_z sily zotrvačnej a M_g sily tiažovej vzhľadom na bod O určujú stabilitu fľaše. Ak $M_z < M_g$, fľaša sa nezačne otáčať (prevracať). Podmienka stability je tak

$F_z\, h < F_g\, r$, a teda $a < \dfrac{r}{h}\, g$. 1 b

Stabilitu tak určuje pomer polomeru r a výšky ťažiska h nádoby nad rovinou pásu. Vysoká fľaša s menším priemerom sa tak ľahšie prevráti ako nižšia s väčším priemerom. 1 b

b) Hmotnosť nádoby je

$$m_0 = \rho_s\, d\left(\pi r^2 + 2\pi r H\right) = \pi \rho_s\, d\, r\left(r + 2H\right).$$ Pre dané hodnoty $m_0 \approx 0{,}45$ kg. 1 b

c) Nádoba má dve časti – dno a valcovú stenu. Ťažisko dna je v nulovej výške, ťažisko valcovej steny v polovici výšky. Celková výška ťažiska nad stolom je

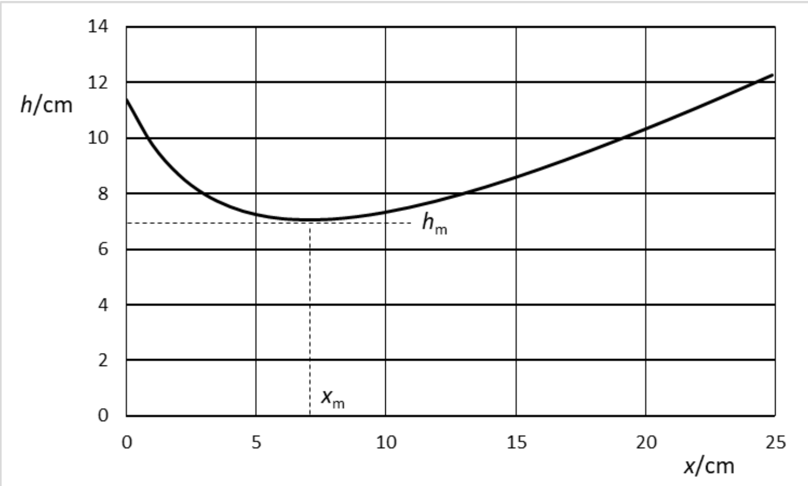
$$h_0 = \frac{1}{m_0}\left(m_d \cdot 0 + m_s \frac{H}{2}\right) = \frac{H^2}{r + 2H}.$$ Pre dané hodnoty $h_0 \approx 0{,}45\, H \approx 11{,}4$ cm. 1 b

d) K nádobe pribudne vodné teleso s hmotnosťou $m_v = \pi r^2 x \rho_v$ s ťažiskom vo výške $x/2$. Celková výška ťažiska je

$$h = \frac{1}{m}\left(m_d \cdot 0 + m_s \frac{H}{2} + m_v \frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_v}\frac{d H^2}{r} + \frac{x^2}{2}}{\frac{\rho_s}{\rho_v} d\left(1 + 2\frac{H}{r}\right) + x}.$$ 1 b

e) Pre dané hodnoty má funkcia tvar

$$h = \frac{65\,\text{cm}^2 + \frac{x^2}{2}}{5{,}72\,\text{cm} + x}$$, kde x a h sú v jednotkách cm. 1 b



Obr. RC–3 1 b

f) Z grafu vidíme, že ťažisko je v najmenšej výške $h_m \approx 7{,}0$ cm, ak je nádoba naplnená vodou do výšky $x_m \approx 7{,}0$ cm, tzn. do 28 % svojej výšky. V tomto prípade je nádoba najstabilnejšia s ohľadom na prevrátenie. 1 b

Z grafu tiež vidíme, že skôr sa prevráti celkom plná nádoba ako nádoba prázdna. Z troch uvedených prípadov je najstabilnejšia nádoba naplnená do polovice výšky. 1 b

Pozn.: V tejto úvahe sa neráta s tým, že v prípade zrýchlenia nádoby sa voľná hladina vody v nádobe vychýli k zadnému okraju vzhľadom na smer zrýchlenia, čo nebezpečenstvo prevrátenia zvyšuje. Tento efekt sa neprejaví u prázdnej alebo celkom plnej a uzatvorenej nádoby. Aby sme s ním nemuseli počítať aj v iných prípadoch, zaviedli sme predpoklad tenkého piesta, ktorý udrží vodorovnú hladinu v nádobe.

5. Balónik

Riešenie:

a) Pre hélium vo vnútri balóna platí stavová rovnica

$$p_1 V = \frac{m}{M_{\mathrm{He}}} R T_0 \text{, kde } R = 8{,}31\ \mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}} \text{ je mólová plynová konštanta.}$$

Odtiaľ hmotnosť hélia $m = \dfrac{p_1 M_{\mathrm{He}} V}{R T_0}$.

Na balón s retiazkou pôsobia tiažová sila F_G a vztlaková sila F_v

$$F_G = m g + \mu h_0 g \quad \text{a} \quad F_v = \rho_0 V g\ .$$

V stave rovnováhy balóna vo výške h majú tieto sily rovnakú veľkosť.

Pre začiatočné podmienky p_0, T_0, h_0 máme $p_0 = \dfrac{\rho_0}{M_{\mathrm{vz}}} R T_0$, ρ_0 je hustota vzduchu pri teplote T_0.

Podmienka rovnováhy je

$m + \mu h_0 = \rho_0 V$ a po dosadení

$$h_0 = \left(p_0 M_{\mathrm{vz}} - p_1 M_{\mathrm{He}} \right) \frac{V}{\mu R T_0}.$$ Pre dané hodnoty $h_0 \approx 292$ cm. 4 b

b) Ak sa pri teplote T_0 zmení atmosférický tlak na p_2, zmení sa hustota vzduchu. Hmotnosť hélia vo vnútri balóna sa však nezmení. Hustota vzduchu je

$$\rho_1 = \frac{p_2 M_{\mathrm{vz}}}{R T_0}.$$

Podmienka rovnováhy síl má tvar $m + \mu h_1 = \rho_1 V$, odkiaľ

$$h_1 = \left(p_2 M_{\mathrm{vz}} - p_1 M_{\mathrm{He}} \right) \frac{V}{\mu R T_0}.$$ Pre dané hodnoty $h_1 \approx 282$ cm. 3 b

c) Ak sa pri tlaku p_0 zmení teplota z hodnoty t_0 na t_2, pre rovnováhu síl platí $m + \mu h_2 = \rho_2 V$, pričom

$$\rho_2 = \frac{p_0 M_{\mathrm{vz}}}{R T_2}.$$

Potom pre dĺžku zvislého úseku retiazky máme

$$h_2 = \left(\frac{p_0 M_{\mathrm{vz}}}{T_2} - \frac{p_1 M_{\mathrm{He}}}{T_0} \right) \frac{V}{\mu R}.$$ Pre dané hodnoty $h_2 \approx 289$ cm. 3 b

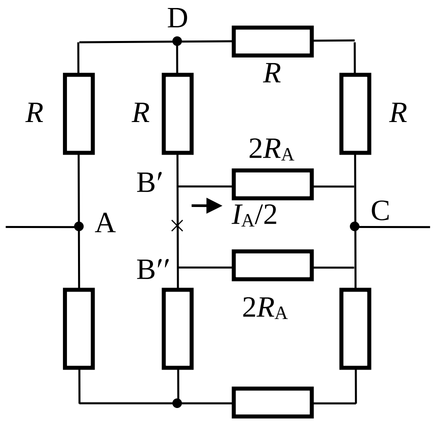
Ako vidieť z výsledku, pri zmene tlaku sa skutočne mení výška balónika. Výška však závisí i od teploty. Ak by sa mal tento spôsob použiť na meranie tlaku, musela by sa robiť korekcia na zmenu teploty.

6. Elektrický obvod

Riešenie:

a) Existuje viacero spôsobov riešenia obvodu.

Uvedieme riešenie, ktoré využíva elektrickú symetriu obvodu podľa pozdĺžnej osi BC, obr. RC–4.



Obr. RC–4

Odpor R_A ampérmetra rozdelíme na dva paralelné odpory $2R_A$, pričom prvý priradíme k hornej polovici obvodu a druhý k dolnej polovici. Keďže v dôsledku symetrie je potenciál bodov B′ a B″ rovnaký, prechádza spojkou nulový prúd a spojku tak môžeme prerušiť. Dostávame tak dve rovnaké paralelné vetvy AC s odpormi každej z nich

$$R_{AC} = R + R_{DC} = R + \frac{2R\,(R + 2R_A)}{3R + 2R_A}.$$

Celkový odpor obvodu vzhľadom na zdroj

$$R_c = R + \frac{R_{AC}}{2} = \frac{3R}{2} + \frac{R\,(R + 2R_A)}{3R + 2R_A},$$

a teda

$$U_z = \left[\frac{3R}{2} + \frac{R\,(R + 2R_A)}{3R + 2R_A}\right] I_{z1}, \qquad (1)$$

kde I_{z1} je prúd zdroja.

V uzle A sa prúd I_{z1} rozdelí na polovice. Prúd $I_{z1}/2$ prechádza napr. medzi uzlami D a C, pričom prúd vetvy DB′C je

$$\frac{I_{A1}}{2} = \frac{I_{z1}}{2}\,\frac{2R}{3R + 2R_A} \text{ (delič prúdu).} \qquad (2) \qquad 2\text{ b}$$

Po dosadení do (1) a úprave máme

$$R = \frac{2}{11}\left(2\frac{U_z}{I_{A1}} - 5R_A\right). \qquad (3) \qquad 2\text{ b}$$

Prúd zdroja určíme z (1) a (2)

$$I_{z1} = \frac{3R + 2R_A}{2R} I_{A1} = \frac{3U_z - 2R_A I_{A1}}{2U_z - 5R_A I_{A1}} I_{A1}.$$

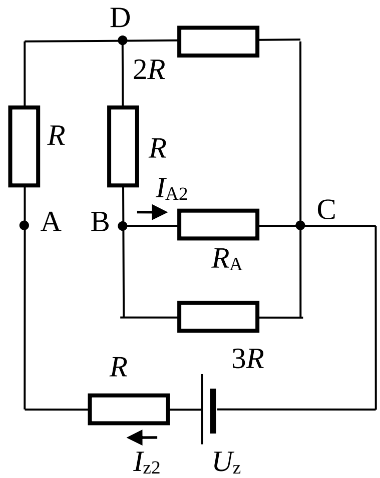
Pre dané hodnoty R = 80 Ω, I_{z1} = 76 mA. (3a) 2 b

b) Obvod s odpojeným rezistorom prekreslíme podľa obr. RC–5.

Celkový odpor vzhľadom na zdroj

$$R_{c2} = 2R + \frac{2R\left(R + \dfrac{3R\,R_A}{3R + R_A}\right)}{3R + \dfrac{3R\,R_A}{3R + R_A}} = \frac{4}{3}\,\frac{6R^2 + 5RR_A}{3R^2 + 2RR_A}\,R.$$

Po dosadení z (3)



Obr. RC–5

$$R_{c2} = \frac{2}{33}\left(\frac{24U_z - 5R_A I_{A1}}{3U_z - 2R_A I_{A1}}\right)\left(\frac{2U_z - 5R_A I_{A1}}{I_{A1}}\right).$$

Prúd zdroja

$$I_{z2} = \frac{U_z}{R_{c2}} = \frac{33}{2}\left(\frac{3U_z - 2R_A I_{A1}}{24U_z - 5R_A I_{A1}}\right)\left(\frac{U_z}{2U_z - 5R_A I_{A1}}\right) I_{A1}. \qquad (4) \qquad 1\text{ b}$$

Prúd I_{z2} sa v uzle D delí

$$I_{DB} = I_{z2}\frac{2R}{2R + \left(R + \dfrac{3RR_A}{3R + R_A}\right)} = I_{z2}\frac{12U_z - 19R_A I_{A1}}{12U_z - 8R_A I_{A1}}$$

a ten sa v uzle B opäť delí

$$I_{A2} = I_{DB}\frac{3R}{3R + R_A} = I_{z2}\frac{2R}{3R + 2R_A} = I_{z2}\frac{2U_z - 5R_A I_{A1}}{3U_z - 2R_A I_{A1}}.$$

Po dosadení za I_{z2} dostávame

$$I_{A2} = \frac{33}{2}\left(\frac{U_z}{24U_z - 5R_A I_{A1}}\right) I_{A1}. \qquad (5) \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $I_{z2} \approx 53$ mA, $I_{A2} \approx 28$ mA. (6) 2 b

Pozn. k hodnoteniu: priradiť bodové hodnoty za a) 6 b a b) 4 b, ak sú správne vypočítané hodnoty požadovaných veličín (3a) a (6).

7. Tepelná kapacita – experimentálna úloha 10 b

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (1,3,4,5,6), Patrik Lamoš (2), Ivo Čáp (7)
Recenzia a úprava úloh a riešení: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha, Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020