62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória B – domáce kolo
Riešenia úloh

1. Pád kvapky v elektrickom poli

Riešenie:

a) Kvapka sa na začiatku zelektrizuje na potenciál φ prijatím náboja Q. Prvá časť pohybu na dráhe h je rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením g pôsobením tiažovej sily $\boldsymbol{F}_g = m\,\boldsymbol{g}$.

Po vniknutí medzi dosky pôsobí na kvapku okrem tiažovej sily $\boldsymbol{F}_g$ aj priečna elektrická sila $\boldsymbol{F}_e = Q\,\boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického poľa medzi doskami. V dôsledku priečnej sily sa pohyb kvapky odchyľuje od zvislého smeru, takže na výstupe z elektrického poľa je smer pohybu odchýlený od zvislého smeru o uhol α. V poslednej časti pohybu ide o šikmý vrh pod účinkom tiažovej sily $\boldsymbol{F}_g$. sily 2 b

opis javu 1 b

b) Hmotnosť kvapky tvaru gule

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ kde } r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \text{ je polomer kvapky.} \qquad (1)$$

Potenciál na povrchu vodivej gule s nábojom Q

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \qquad (2)$$

Zo vzťahov (1) a (2) dostávame

$$Q = 4\pi\varepsilon_0\,\varphi\,r = \varepsilon_0\,\varphi\sqrt[3]{\frac{48\pi^2}{\rho}m}. \qquad 2\text{ b}$$

c) Na dráhe h získa kvapka rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

V druhej časti pádu medzi doskami pokračuje kvapka nadol rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením g. Výsledná zvislá zložka rýchlosti na konci dráhy $h + d$

$$v_{2y} = \sqrt{2g(h+d)}.$$

Čas t_2 pohybu medzi doskami dostaneme zo vzťahu $v_2 = v_1 + g\,t_2$

$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{g} = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right).$$

Vo vodorovnom smere pôsobí na kvapku konštantná sila $F_e = Q\,E$, kde $E = U/a$, ktorá jej za čas t_2 udelí rýchlosť

$$v_{2x} = a_x t_2 = \frac{QE}{m}t_2 = \frac{QU}{ma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right).$$

Za dobu t_2 pádu v elektrickom poli od osi o vo vodorovnom smere sa vychýli o

$$x_2 = \frac{1}{2} a_x t_2^2 = \frac{1}{2} \frac{QE}{m} t_2^2 = \frac{QU}{mag}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{48\pi^2}{\rho m^2}} \frac{\varepsilon_0 \varphi U}{ag}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right)^2.$$

V tretej časti pádu kvapka pokračuje pohybom pôsobením tiažovej sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$.

V zvislom smere získa rýchlosť

$$v_{3y} = \sqrt{2g(h+d+H)}$$

za dobu

$$t_3 = \frac{v_{3y} - v_{2y}}{g} = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h+d+H} - \sqrt{h+d}\right).$$

Za tento čas sa kvapka posunie vo vodorovnom smere

$$x_3 = v_{2x} t_3 = \frac{2QU}{mag}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right)\left(\sqrt{h+d+H} - \sqrt{h+d}\right).$$

Celková odchýlka od osi v bode dopadu na podložku

$$x = x_2 + x_3 = \frac{QU}{mag}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right)\left[2\sqrt{h+d+H} - \sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\,\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \varphi U}{ag} \sqrt[3]{\frac{48\pi^2}{\rho m^2}}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right)\left[2\sqrt{h+d+H} - \sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\,\right].$$

Z toho určíme hmotnosť m kvapky

$$m = 4\pi\sqrt{\frac{3}{\rho}}\left\{\frac{\varepsilon_0 \varphi U}{ag}\left(\sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\right)\left[2\sqrt{h+d+H} - \sqrt{(h+d)} - \sqrt{h}\,\right]\right\}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^3}}. \qquad (3)$$

1 b

Ako vidíme, hmotnosť m je nepriamoúmerná 1,5–mocnine odchýlky x.

d) Po dosadení x = 3,5 mm dostávame $m \approx 0{,}43$ g. 1 b

Ak je výsledná veličina daná súčinom alebo podielom iných veličín, je relatívna odchýlka výsledku daná súčtom relatívnych odchýlok veličín v súčine alebo podiele. Ak sa veličina vyskytuje v druhej mocnine, prejaví sa v odchýlke výsledku dvojnásobkom svojej relatívnej odchýlky.

Pre odchýlku použijeme vzťah $\dfrac{\Delta m}{m} = 2\dfrac{\Delta x}{x}$, tzn. $\Delta m = 2\, m \dfrac{\Delta x}{x}$. 0,5 b

Pre dané hodnoty Δx = 0,5 mm a x = 3,5 mm a vypočítanú hodnotu $m \approx 0{,}43$ g
dostávame $\Delta m \approx 0{,}12$ g, a teda výsledná hodnota $m = (0{,}43 \pm 0{,}12)$ g. 1 b

Polomer kvapiek s hmotnosťou m = 0,43 g $\qquad r = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}\dfrac{m}{\rho}} \approx 4{,}68$ mm. 1 b

Z výsledkov je zrejmé, že pre dané číselné hodnoty nemožno experiment uskutočniť, keďže priemer kvapky $2r \approx 9{,}4$ mm je väčší ako vzdialenosť a medzi doskami. 0,5 b

Realistický výsledok by sa dosiahol buď pre U = 100 V alebo pre x = 3,5 cm.

2. Miska vo vode

Riešenie:

a) Miska pôsobí na dno nádoby svojou tiažou $F_1 = F_G = m_p g = V_s \rho_s g$,

kde objem skla $V_s = \left[a^2 + 4(h-d)(a-d)\right] d$.

Hodnota F_1 sily $\boldsymbol{F}$ je

$$F_1 = \left[a^2 + 4(h-d)(a-d)\right] d\, \rho_s\, g\,. \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $F_1 \approx 962{,}6$ mN.

b) Keď nalejeme vodu do nádoby, voda pod okraj misky nevnikne a pôsobí iba na hornú podstavu a bočné steny. Sily pôsobiace na bočné steny sa navzájom rušia. Na podstavu pôsobí hydrostatický tlak stĺpca vody s výškou $H - h$. Keďže voda sa nemôže dostať pod misku, vztlaková sila na úrovni spodného okraja misky nepôsobí. Ak je na misku položené závažie, pôsobí na misku smerom nadol okrem hydrostatickej sily navyše tiažová sila závažia zmenšená o vztlakovú silu závažia

$$F_2 = F_1 + a^2 (H-h)\rho_v\, g + m_z\, g - \frac{m_z}{\rho_m}\rho_v\, g\,. \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

Ak závažie odstránime, výsledná výška H sa prakticky nezmení a je výsledná sila

$$F_3 = F_1 + a^2 (H-h)\rho_v\, g\,. \qquad (3) \qquad 1\text{ b}$$

Ako vidíme, obe hodnoty sily F_2 a F_3 sú väčšie ako hodnota F_1.

Pre dané hodnoty $F_2 \approx 6{,}29$ N, $F_3 \approx 6{,}11$ N. 2 x 0,5 b

Tlaková sila na dno nádoby sa zväčší, preto odtrhnúť pohár od dna vyžaduje väčšiu silu ako na zodvihnutie prázdneho pohára bez vody v nádobe.

c) Ak začneme misku ponárať, je tlak na úrovni spodného okraja misky rovný tlaku vody v danej hĺbke. Pri zväčšovaní tlaku vody sa zvyšuje aj tlak vzduchu v miske a zmenšuje sa jeho objem. Ak ponoríme dolný okraj pohára do hĺbky H, je hydrostatický tlak na dolnom okraji pohára $p_H = H \rho_v g$. V dôsledku zvýšeného tlaku sa voda v pohári dostane do výšky δ, pričom tlak vzduchu v miske je rovný $p_{vz} = p_0 + (H - \delta)\, \rho_v\, g$.

Ak predpokladáme konštantnú teplotu vzduchu, použijeme stavovú rovnicu $p_{vz} V = p_0 V_0$, a pre vzduch uzavretý pod miskou máme

$$\left[p_0 + (H-\delta)\rho_v\, g\right] V = p_0 V_0\,, \text{ kde } V_0 = (a-2d)^2 (h-d) \text{ a } V = V_0 - (a-2d)^2 \delta$$

Po dosadení do stavovej rovnice a úprave dostávame kvadratickú rovnicu pre δ

$$\delta^2 - \left(H + h - d + \frac{p_0}{\rho_v\, g}\right)\delta + H(h-d) = 0\,.$$

Odtiaľ máme

$$\delta = \frac{1}{2}\left[H_0 + H + h - d\right]\left(1 \pm \sqrt{1 - 4H(h-d)\left(\frac{1}{H_0 + H + h - d}\right)^2}\right), \qquad (4) \qquad 1\text{ b}$$

pričom $H_0 = p_0 / (\rho_v\, g) \approx 10{,}3$ m a fyzikálny význam má iba zn. „–“ (pre „+“ by bolo $\delta > h$).

Po dosadení $\delta \approx 0{,}827$ mm,

Tlak vzduchu vo vnútri misky môžeme všade považovať za rovnaký. Rozdiel tlaku pod miskou a atmosférického tlaku na voľnej hladine vody v nádobe je rovný hydrostatickému tlaku vody na úrovni voľnej hladiny vody v miske. Ak je miska už na dne nádoby, tento hydrostatický tlak vody je rovný $(H_1 - \delta)\rho_\mathrm{v} g$. Jeho pôsobenie na dno misky vytvára vztlakovú silu

$$F_\mathrm{vz} = a^2 h \rho_\mathrm{v} g - (a - 2d)^2 \delta \rho_\mathrm{v} g .$$

Ak je miska zaťažená závažím, pôsobí na misku tiaž ponoreného závažia

$$F_\mathrm{z} = m_\mathrm{z} \left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{m}}\right) g .$$

Tlaková sila na dno

$$F_4 = F_1 + m_\mathrm{z} \left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_m}\right) - a^2 h \rho_\mathrm{v} g + (a - 2d)^2 \delta \rho_\mathrm{v} g . \qquad (5) \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty F_4 = 168 mN. 0,5 b

d) Ak odstránime záťaž, dostane vzťah pre F_4 tvar

$$F_5 = F_1 + \left[(a - 2d)^2 \delta - a^2 h\right] \rho_\mathrm{v} g . \qquad (6)$$

Pre dané hodnoty F_5 = –5,4 mN.

Pozn.: Keďže výsledok obsahuje desatiny mN*, musí byť veličina F_1 určená tiež s presnosťou na desatiny* mN. *Druhá možnosť je dosadiť priamo do vzťahu so zadanými veličinami*

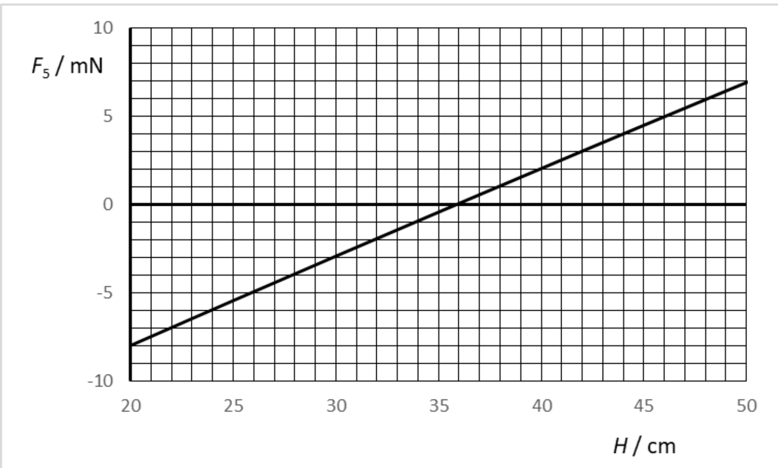
$$F_5 = \left[a^2 + 4(h-d)(a-d)\right] d \rho_\mathrm{s} g + \left[(a - 2d)^2 \delta - a^2 h\right] \rho_\mathrm{v} g \approx -5{,}46 \text{ mN}.$$

Vztlaková sila je väčšia ako tiažová a miska sa začne zdvíhať. S klesajúcim tlakom sa zmenšuje δ, a tým sa zmenšuje aj vrstva vody vnikajúcej do misky, čo zvyšuje vztlakovú silu a vynáranie sa urýchľuje. Ak sa však miska nadvihne nesymetricky (rovina okraja sa vychýli z vodorovného smeru), vzduch z misky unikne a voda vnikne pod misku. To spôsobí poklesnutie misky nazad na dno.

e) Do vzťahu (6) pre F_5 dosadíme za δ zo vzťahu (4)

$$F_5 = F_1 + \left[(a - 2d)^2 \frac{H_0 + H + h - d}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4H(h-d)}{(H_0 + H + h - d)^2}}\right) - a^2 h\right] \rho_\mathrm{v} g . \qquad 1\text{ b}$$

Graf tejto funkcie (zostrojíme ho pomocou tabuľkových hodnôt veličín) 1 b



Z grafu visíme, že výške H = 25 cm zodpovedá hodnota $F_5 \approx$ –5,4 mN (výsledok d)).

Ďalej vidíme, že pre $H > H_\mathrm{m} \approx 36$ cm zostane miska pritlačená na dno nádoby aj po odstránení závažia. 1 b

3. Nádoba na naklonenej rovine

Riešenie:

a) Výsledok experimentu by mal byť nasledovný: prvá sa prevráti plná nádoba, potom prázdna a nakoniec poloplná. 1 b

b) Hmotnosť nádoby

$$m_0 = \rho V = \rho\left(d\,a^2 + 4d\,a\,h_0\right),$$

kde d je hrúbka steny a dna nádoby.

Ťažisko sa nachádza na geometrickej osi nádoby, $x_1 = 0$.

Výška ťažiska (súradnica y_1)

$$h_1 = \frac{1}{M}\left(m_\text{d}\cdot 0 + m_\text{s}\frac{h_0}{2}\right) = \frac{1}{\rho\left(d\,a^2 + 4d\,a\,h_0\right)}\left(0 + 4\rho\,d\,a\,h_0\frac{h_0}{2}\right) = \frac{2h_0^2}{a + 4h_0}\,. \qquad 1\text{ b}$$

(m_d je hmotnosť dna a m_s hmotnosť stien nádoby)

Pre dané hodnoty $x_1 = 0$, $h_1 \approx 11{,}4$ cm. Výsledky nezávisia od uhlu α.

Ak je nádoba naplnená vodou, je ťažisko na osi nádoby, $x_2 = 0$, a pre výšku nad dnom platí

$$h_2 = \frac{1}{m_0 + m_\text{v}}\left(m_0\,h_1 + m_\text{v}\frac{h_0}{2}\right) = \frac{4m_0\,h_0^2 + \rho_\text{v}\,a^2\,h_0^2\left(a + 4h_0\right)}{2\left(m_0 + \rho_\text{v}\,a^2\,h_0\right)\left(a + 4h_0\right)}\,. \qquad 1\text{ b}$$

(m_v je hmotnosť vody v nádobe)

Keďže je nádoba uzatvorená tenkou fóliou, pri nakláňaní zostáva ťažisko v pôvodnej polohe na osi nádoby a nezávisí od uhlu α.

Pre dané hodnoty $x_2 = 0$, $h_2 \approx 12{,}5$ cm. 1 b

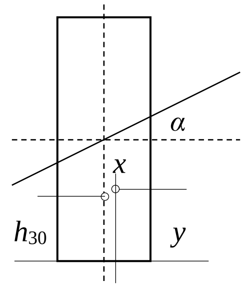
Pre nádobu naplnenú iba do polovice objemu najprv určíme výšku ťažiska na vodorovnej podložke. Ťažisko je na osi nádoby vo výške

$$h_{30} = \frac{1}{m_0 + \frac{1}{2}m_\text{v}}\left(m_0\,h_1 + \frac{m_\text{v}}{2}\frac{h_0}{4}\right) = \frac{m_0\dfrac{2h_0^2}{a + 4h_0} + \dfrac{1}{2}\rho_\text{v}\,a^2\,h_0\dfrac{h_0}{4}}{\left(m_0 + \dfrac{1}{2}\rho_\text{v}\,a^2\,h_0\right)}$$

a po úprave

$$h_{30} = \frac{16h_0^2\,m_0 + \rho_\text{v}\,a^2\,h_0^2\left(a + 4h_0\right)}{4\left(a + 4h_0\right)\left(2m_0 + \rho_\text{v}\,a^2\,h_0\right)}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $h_{30} \approx 6{,}6$ cm.



Obr. RB–1

Pri nakláňaní nádoby o uhol α zostáva hladina vody v nádobe vodorovná. Vzhľadom na dno nádoby je hladina naklonená o rovnaký uhol α. V dôsledku toho sa ťažisko vychyľuje z pôvodnej polohy. Polohu ťažiska určíme v sústave spojenej s nádobou. Po naklonení o uhol α sa voda s hmotnosťou $m = \rho_\text{v}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{4}\tan\alpha\right)a$ presunie z ľavej časti nádoby do pravej časti, obr. RB–1.

Vzdialenosť ťažiska h_3 od podstavy

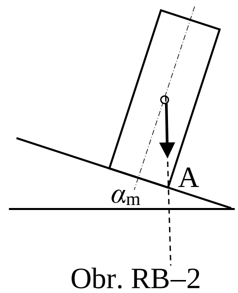
$$h_3=\frac{1}{m_0+\frac{1}{2}m_\mathrm{v}}\left(m_0\,h_1+\frac{m_\mathrm{v}}{2}\frac{h_0}{4}+m\frac{a}{3}\tan\alpha\right).$$ 1 b

Tento vzťah možno upraviť napr. na tvar

$$h_3=h_{30}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{h_0}\right)^2\frac{\tan\alpha}{1+4\dfrac{m_0}{m_\mathrm{v}}\dfrac{4h_0}{4h_0+a}}\right]$$

Pre dané hodnoty je výraz za jednotkou v zátvorke $4{,}7\cdot10^{-2}\tan\alpha$.

To znamená, zjednodušenie $h_3\approx h_{30}$ je oprávnené. 0,5 b



Obr. RB–2

Priečne posunutie ťažiska

$$x_3=\frac{1}{m_0+\frac{1}{2}m_\mathrm{v}}\left(m\frac{2}{3}\frac{a}{2}\right)=\frac{a^4\rho_\mathrm{v}}{48}\,\frac{\tan\alpha}{m_0+\frac{1}{2}\rho_\mathrm{v}\,a^2\,h_0}.$$ 1 b

Tento vzťah možno upraviť napr. na tvar

$$x_3=\frac{a}{2}\,\frac{\tan\alpha}{12\left(1+\dfrac{2m_0}{m_\mathrm{v}}\right)}=k\,\frac{a}{2}.$$

Pre dané hodnoty $k=7{,}7\cdot10^{-2}\tan\alpha$. Keďže $x_3<<a/2$, je teda oprávnené zanedbanie tohto posunutia, tzn. $x_3\approx0$. 0,5 b

c) Pri nakláňaní nádoby nastane medzný stav, keď bude ťažisko zvislo nad hranou A, okolo ktorej na nádoba otáča, obr. RB–2.

Ak je nádoba prázdna, pre medzný uhol sklonu máme

$$\tan\alpha_\mathrm{m1}=\frac{a}{2h_1}=\frac{a\left(a+4h_0\right)}{4h_0^2}.$$ Pre dané hodnoty $\alpha_\mathrm{m1}\approx23{,}7°$. 0,5 b

Pre plnú nádobu je uhol sklonu daný vzťahom

$$\tan\alpha_\mathrm{m2}=\frac{a}{2h_2}=\frac{a\left(m_0+\rho_\mathrm{v}\,a^2\,h_0\right)\left(a+4h_0\right)}{4m_0\,h_0^2+\rho_\mathrm{v}\,a^2\,h_0^2\left(a+4h_0\right)}.$$ Pre dané hodnoty $\alpha_\mathrm{m2}\approx21{,}8°$. 0,5 b

V treťom prípade pre medzný uhol dostávame

$$\tan\alpha_\mathrm{m3}=\frac{\frac{a}{2}-x_3}{h_3}\approx\frac{a}{2h_{30}}=\frac{m_0\,a\left(a+4h_0\right)+\rho_\mathrm{v}\,a^2\left(a+4h_0\right)\dfrac{a\,h_0}{2}}{4m_0\,h_0^2+\rho_\mathrm{v}\,a^2\left(a+4h_0\right)\dfrac{h_0^2}{4}}..$$

Ak uvažujeme zjednodušenie $x_3\approx0$ a $y_3\approx y_{30}$, je medzný uhol určený vzťahom

Pre dané hodnoty $\alpha_\mathrm{m30}\approx37{,}0°$. 0,5 b

d) Teoretické výsledky potvrdzujú výsledky experimentu: $\alpha_\mathrm{m2}<\alpha_\mathrm{m1}<\alpha_\mathrm{m3}$. 0,5 b

Pozn.: Odporúčame prideliť body za správne výsledky ak riešiteľ používa pri výpočte výsledné veličiny a hodnoty z predchádzajúcich bodov riešenia.

4. Zohrievanie elektrického vodiča

Riešenie:

a) Pri prechode prúdu sa v drôte uvoľňuje tepelný výkon

$$P_1 = \frac{U_0^2}{R_1} = \frac{U_0^2}{\rho_{20}\left(1+\alpha\,\Delta t_1\right)}\,\frac{\pi d_1^2}{4l}\text{, kde } \Delta t_1 = t_1 - t_0.$$

Teplo prechádza prestupom z povrchu drôtu do okolia, pričom platí

$P_1 = \gamma S_1\left(t_1 - t_0\right) = \gamma\,\pi d_1\,l\,\Delta t_1$, kde S_1 je obsah valcového povrchu drôtu.

$$\gamma = \frac{U_0^2}{4l^2}\,\frac{d_1}{\rho_{20}\left(1+\alpha\,\Delta t_1\right)\Delta t_1}\,. \qquad (1)$$

Pre dané hodnoty $\gamma \approx 24\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. 2 b

Prúd zdroja

$$I_1 = \frac{P_1}{U_0} = \frac{1}{U_0}\,\gamma\,\pi d_1\,l\,\Delta t_1\,.$$

Pre dané hodnoty $I_1 \approx 0{,}46$ A. 1 b

b) Ak sú drôty pripojené na zdroj paralelne, je na oboch drôtoch rovnaké napätie. Preto ustálená teplota prvého drôtu $t_2 = t_1$, tzn. $t_2 = 80$ °C a prechádza ním prúd I_1. 0,5 b

Druhý drôt má priemer d_2 a tak vzťah (1) upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$\left(\Delta t_3\right)^2 + 2\frac{1}{2\alpha}\Delta t_3 - \frac{U_0^2\,d_2}{4\gamma\,\alpha\,l^2\rho_{20}} = 0\,,$$

ktorá má riešenie

$$\Delta t_3 = -\frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + \frac{U_0^2\,d_2}{4\gamma\,\alpha\,l^2\rho_{20}}}\,.$$

Pre $\Delta t_3 > 0$ má fyzikálny význam znamienko „+“.

Pre dané hodnoty $\Delta t_3 \approx 34$ °C, tzn. $t_3 \approx 54$ °C. 0,5 b

Prúd zdroja je súčtom prúdov prechádzajúcich obomi drôtmi

$$I_2 = I_1 + \frac{P_2}{U_0} = I_1 + \frac{1}{U_0}\,\gamma\,\pi d_2\,l\,\Delta t_3 \approx 0{,}59\ \text{A}. \qquad 1\ \text{b}$$

c) Napätie na drôte pri prúde I

$$U = RI = \rho_{20}\left(1+\alpha\,\Delta t\right)\frac{l}{S}\,I\,. \qquad (2)$$

Tepelný výkon je odovzdávaný do okolia

$$RI^2 = \rho_{20}\left(1+\alpha\,\Delta t\right)\frac{4l}{\pi d^2}\,I^2 = \gamma\,\pi d\,l\,\Delta t\,,$$

odkiaľ máme

$$\Delta t = \frac{4\rho_{20}}{\gamma\,\pi^2 d^3}\,\frac{I^2}{1 - \dfrac{4\alpha\,\rho_{20}}{\gamma\,\pi^2 d^3}\,I^2} \qquad (3)$$

Po dosadení (3) do (2) dostávame

$$U = \frac{4\rho_{20}\,l}{\pi d^2}\frac{I}{1-\dfrac{4\alpha\,\rho_{20}}{\gamma\,\pi^2\,d^3}I^2}. \qquad (4) \qquad 2\text{ b}$$

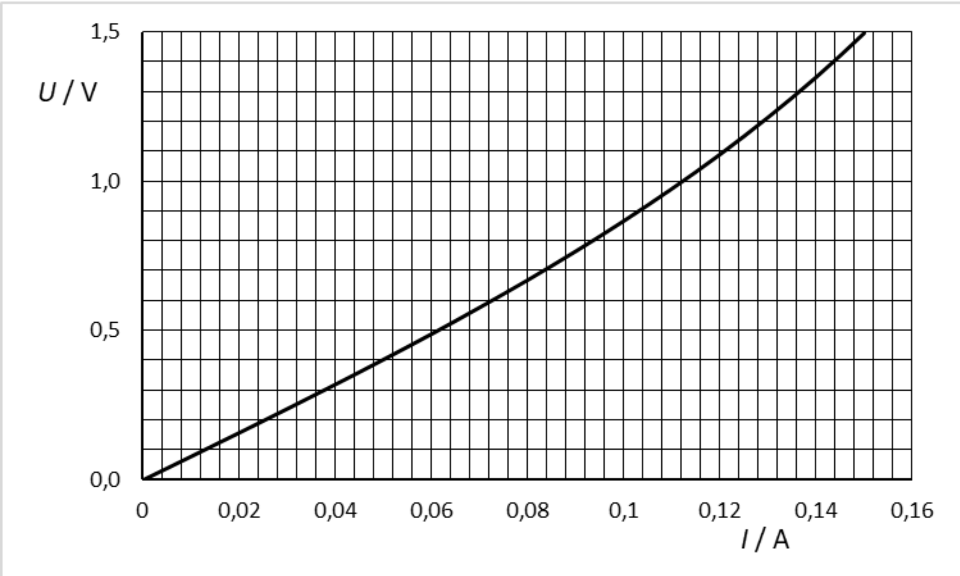
Pri sériovom zapojení drôtov s priemermi d_1 a d_2 máme

$$U = U_1 + U_2 = \frac{4\rho_{20}\,l}{\pi}\left(\frac{1}{d_1^2 - \dfrac{4\alpha\,\rho_{20}}{\gamma\,\pi^2\,d_1}I^2} + \frac{1}{d_2^2 - \dfrac{4\alpha\,\rho_{20}}{\gamma\,\pi^2\,d_2}I^2}\right)I \qquad (5)$$

a zvýšenie teploty drôtov

$$\Delta t_4 = \frac{4\rho_{20}\,I^2}{\gamma\,\pi^2\,d_1^3 - 4\alpha\,\rho_{20}\,I^2}, \quad \Delta t_5 = \frac{4\rho_{20}\,I^2}{\gamma\,\pi^2\,d_2^3 - 4\alpha\,\rho_{20}\,I^2}. \qquad (6)$$

Rovnica (4) je príliš zložitá na analytické riešenie, preto zvolíme riešenie numerické alebo grafické. Zostrojíme graf funkcie $U = \mathrm{f}\,(I)$ pre dané hodnoty veličín (zostavíme tabuľku, pre jednotlivé hodnoty prúdu I vypočítame hodnoty U)



Z grafu (prípadne z tabuľky), určíme pre napätie zdroja $U = U_0 = 1{,}0$ V, prúd zdroja $I_3 \approx 0{,}115$ A .

1 b

Prúd I_3dosadíme do (5) a určíme príslušné teploty

$\Delta t_4 \approx 2{,}8$ °C, $\Delta t_5 \approx 26$ °C, resp. $t_4 \approx 23$ °C a $t_5 \approx 46$ °C. 2 b

5. Skateboardová rampa

Riešenie:

a) Pred zrážkou vozík A nadobudne rýchlosť, ktorú určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$E_0 = m_\mathrm{A}\,g\,H = \frac{1}{2}m_\mathrm{A}\,v_\mathrm{A0}^2, \text{ odkiaľ máme } v_\mathrm{A0} = \sqrt{2gH}\,. \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Pri zrážke sa zachováva hybnosť

$$m_\mathrm{A}\,v_\mathrm{A0} = m_\mathrm{A}\,v_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B}, \text{ z toho } \left(v_\mathrm{A0} - v_\mathrm{A}\right) = \frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}v_\mathrm{B} \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

Pre energiu sústavy platí

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{A}\,v_\mathrm{A0}^2=\frac{1}{2}m_\mathrm{A}\,v_\mathrm{A}^2+\frac{1}{2}m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B}^2+Q\text{, z toho }\frac{1}{2}m_\mathrm{A}\left(v_\mathrm{A0}-v_\mathrm{A}\right)\left(v_\mathrm{A0}+v_\mathrm{A}\right)=\frac{1}{2}m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B}^2+Q\,. \qquad \text{1 b}$$

Po dosadení z (2) a po úprave dostávame

$$\left(v_\mathrm{A0}+v_\mathrm{A}\right)=v_\mathrm{B}+\frac{2Q}{m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B}}\,. \tag{3}$$

Sčítaním rovníc (2) a (3) vylúčime v_A

$$2v_\mathrm{A0}=\left(\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}+1\right)v_\mathrm{B}+\frac{2Q}{m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B}} \tag{4}$$

Rýchlosť v_B určíme z podmienky, že vozík vystúpi na okraj rampy

$$v_\mathrm{B}=\sqrt{2gH}=v_\mathrm{A0}\,.$$

Odtiaľ

$$q=\frac{Q}{E_\mathrm{k0}}=\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\left(1-\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)=\frac{p-1}{p^2}\,.$$

Pre $p = 3$ máme $q \approx 0{,}22 = 22$ %. 2 b

b) Z (2) máme $v_\mathrm{A}=\left(1-\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)v_\mathrm{A0}=\left(1-\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)\sqrt{2gH}\,.$

Vozík A pokračuje v pôvodnom smere pohybu a vystúpi na pravej stene rampy do výšky

$h_1=\frac{v_\mathrm{A}^2}{2g}=\left(1-\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)^2 H$. Pre $p = 3$ máme $h_1 \approx 0{,}44\,H \approx 1{,}2$ m. 2 b

c) Vozíky vymeníme a zo začiatočnej polohy spustíme vozík B. V najnižšej časti rampy má vozík rýchlosť, pozri (1),

$$v_\mathrm{B0}=\sqrt{2gH}\,.$$

Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy

$$m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B0}=m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B}+m_\mathrm{A}\,v_\mathrm{A}\text{, resp. }v_\mathrm{B0}-v_\mathrm{B}=\frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}}v_\mathrm{A}\,. \tag{5}$$

Ak je stratový faktor zrážky rovnaký ako v prvom prípade, máme

$$Q_2=q\,E_\mathrm{kB}=\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\left(1-\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)\frac{1}{2}m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B0}^2\,. \tag{6}$$

Pre energiu dostávame

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B0}^2=\frac{1}{2}m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B}^2+\frac{1}{2}m_\mathrm{A}\,v_\mathrm{A}^2+Q_2\text{, resp. }\left(v_\mathrm{B0}-v_\mathrm{B}\right)\left(v_\mathrm{B0}+v_\mathrm{B}\right)=\frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}}v_\mathrm{A}^2+\frac{2Q_2}{m_\mathrm{B}}$$

Po dosadení z (5) a (6)

$$v_\mathrm{B0}+v_\mathrm{B}=v_\mathrm{A}+\frac{1}{v_\mathrm{A}}\left(\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)^2\left(1-\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)v_\mathrm{B0}^2\,. \tag{7}$$

Sčítame (7) a (5) a upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$v_\mathrm{A}^2-2\frac{m_\mathrm{B}\,v_\mathrm{B0}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_\mathrm{A}+\frac{2Q_2\,m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}\left(m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}\right)}=0\,.$$

Riešením tejto rovnice dostávame

$$v_\mathrm{A} = \frac{m_\mathrm{B}\, v_\mathrm{B0}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mathrm{A}^2 - m_\mathrm{A}^2}{m_\mathrm{A}\, m_\mathrm{B}} \right) \left(\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}} \right)^2} \right].$$

Z rovnice (5) dostávame

$$v_\mathrm{A} = \frac{m_\mathrm{B}\, v_\mathrm{B0}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} + \frac{m_\mathrm{B} \left(v_\mathrm{A} - v_\mathrm{B} \right)}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}.$$

Keďže $v_\mathrm{A} > v_\mathrm{B}$ (vozík A je pred vozíkom B), je $v_\mathrm{A} > \dfrac{m_\mathrm{B}\, v_\mathrm{B0}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}$, a teda vo výsledku situácii zodpovedá znamienko (+)

$$v_\mathrm{A} = \frac{m_\mathrm{B}\, v_\mathrm{B0}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mathrm{A}^2 - m_\mathrm{B}^2}{m_\mathrm{A}\, m_\mathrm{B}} \right) \left(\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}} \right)^2} \right] = \frac{1}{p+1} \left[1 + \sqrt{\frac{p^3 - p^2 + 1}{p^3}} \right] v_\mathrm{B0},$$ 0,5 b

Z (5) dostávame

$$v_\mathrm{B} = v_\mathrm{B0} - \frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} v_\mathrm{A} = \frac{1}{p+1} \left[1 - \sqrt{\frac{p^3 - p^2 + 1}{p}} \right] v_\mathrm{B0}.$$ 0,5 b

Pre $p = 3{,}0$ máme $v_\mathrm{A} \approx 0{,}46\, v_\mathrm{B0}$ a $v_\mathrm{B} \approx -0{,}38\, v_\mathrm{B0}$. 1 b

Po zrážke sa vozík A pohybuje v smere nárazu na pravú stenu a vozík B sa odrazí nazad na ľavú stenu rampy. Vozíky vystúpia do výšky $h = \dfrac{v^2}{2g}$,

tzn.

$$h_\mathrm{A} = \left\{ \frac{1}{p+1} \left[1 + \sqrt{\frac{p^3 - p^2 + 1}{p^3}} \right] \right\}^2 H,$$

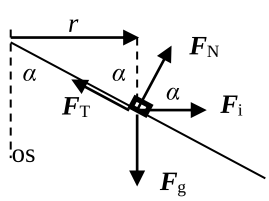
$$h_\mathrm{B} = \left\{ \frac{1}{p+1} \left[1 - \sqrt{\frac{p^3 - p^2 + 1}{p}} \right] \right\}^2 H.$$

Pre dané hodnoty veličín $h_\mathrm{A} \approx 57$ cm a $h_\mathrm{B} \approx 39$ cm. 1 b

6. Telieska na disku

Riešenie:

a) Na obr. RB–3 je znázornené teliesko na rotujúcom disku, na ktoré v neinerciálnej sústave spojenej s diskom pôsobia sily: $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\,\boldsymbol{g}$ – tiažová sila, $\boldsymbol{F}_\mathrm{i} = m\,\omega^2\,\boldsymbol{r}$ – zotrvačná (odstredivá) sila, $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$ – tlaková sila disku na teliesko, $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$ – sila trenia. obrázok + opis síl 2 b



Obr. RB–3

Ak sa teliesko na povrchu nepohybuje, sú tieto sily v rovnováhe (výsledná sila je nulová). Pre zvislý a vodorovný smer platí

$$-F_\mathrm{g} + F_\mathrm{N} \sin\alpha + F_\mathrm{T} \cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$-F_\mathrm{T} \sin\alpha + F_\mathrm{N} \cos\alpha + F_\mathrm{i} = 0, \qquad (2)$$

pričom trenie musí byť statické, pre ktoré platí

$$F_\mathrm{T} \le f\, F_\mathrm{N}. \qquad (3)$$ 1 b

Ak nie je splnená podmienka statického trenia ($F_T > f\ F_N$, teliesko začne kĺzať po povrchu disku nadol a z disku spadne.

Z (1) a (2) vyjadríme sily F_T a F_N

$$F_T = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{F_g + F_i \tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}, \qquad F_N = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{F_g \tan\alpha - F_i}{1+\tan^2\alpha}. \qquad 1\text{ b}$$

Podmienka (3) po úprave má tvar

$$F_i\left(\tan\alpha + f\right) \le F_g\left(f\tan\alpha - 1\right)$$

a po dosadení za jednotlivé sily

$$r \le \frac{g}{\omega^2}\frac{f\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + f}. \qquad (4) \qquad 1\text{ b}$$

Aby mohli byť telieska na šikmom povrchu disku pred začiatkom roztáčania a nezošmykli sa, musí byť splnená podmienka

$$f > \frac{1}{\tan\alpha}. \qquad (5)$$

Pre dané hodnoty je podmienka splnená (0,35 > 0,27). 0,5 b

Pri otáčaní s polomerom r narastá sila F_T. Ak pre telieska od určitého polomeru r sila F_T prekročí medzu statického trenia (3), telieska sa začnú šmýkať k okraju a spadnú. 0,5 b

b) Aby zostali na disku aj telieska na okraji, pre ktoré máme $r = a\sin\alpha$, musí platiť podľa (4)

$$\omega \le \sqrt{\frac{g}{a\sin\alpha}\frac{f\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + f}} = \omega_m. \qquad 1{,}5\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $\omega_m \approx 2{,}0\ \mathrm{s}^{-1}$. 0,5 b

c) Pre $\omega > \omega_m$ začínajú telieska z disku padať, pričom hranica na disku má polomer $r = L\sin\alpha$, odkiaľ podľa (4) máme

$$L = \frac{g}{\omega^2\sin\alpha}\frac{f\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + f}. \qquad 1{,}5\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $L \approx 8{,}5$ cm. 0,5 b

7. **Magnetické pole Zeme – experimentálna úloha** 10 b

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie B*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (1,4,5,6), Aba Teleki (2), Ivo Čáp (3,7)
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha, Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020