62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória A – celoštátne kolo
Riešenie teoretických úloh

1. Šikmý vrh

Riešenie:

a) Pre výstrel smerom nahor platí vzťah

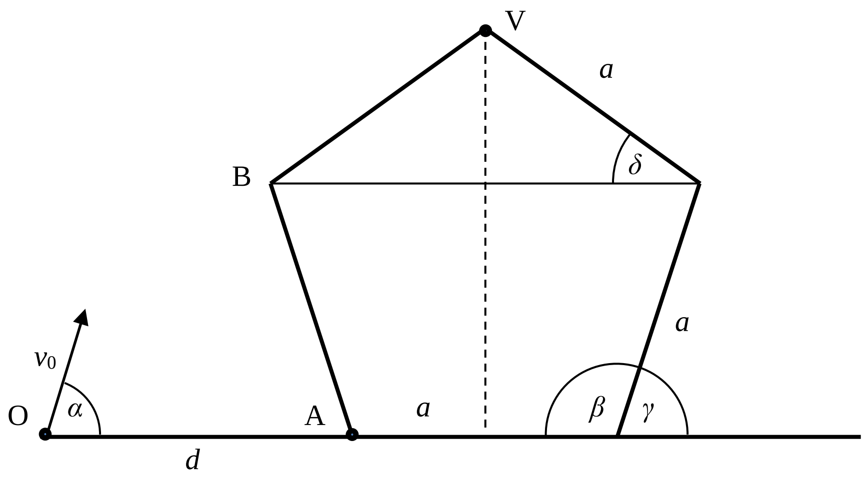
$y = v_{01}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2$, odkiaľ pre dopad $y = 0$ dostávame $\left(v_{01} - \frac{1}{2} g\,t_1\right) t_1 = 0$, a teda

$v_{01} = \frac{1}{2} g\,t_1$, pre dané hodnoty $v_{01} \approx 17{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Dosiahnutá výška

$$h_1 = v_{01}\frac{t_1}{2} - \frac{1}{2} g\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} g\left(\frac{t_1}{2}\right)^2,$$ pre dané hodnoty $h_1 \approx 15{,}0$ m.

Ak má byť potrebná rýchlosť výstrelu čo najmenšia, musí byť najvyšším bodom trajektórie guľky vrchol chaty V.



Obr. RA–1

Označené uhly na obr. RA - 1

$$\beta = \frac{3\pi}{5} = 108°,\ \gamma = \pi - \beta = \pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} = 72°,\ \delta = \beta - \gamma = \frac{3\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5} = 36°.$$

Vodorovná súradnica vrcholu V chaty

$$x_V = d + \frac{a}{2}$$

a výška chaty $y_V = h_V = a\left(\sin\gamma + \sin\delta\right)$,

pre dané hodnoty $h_V \approx 10{,}0$ m.

Výška dosiahnutá v zvislom vrhu nahor h_1 je o 5 m väčšia ako výška chaty h_V, čo chlapca posmelilo skúsiť prestreliť chatu ponad vrchol na druhú stranu.

b) Vrchol trajektórie bod V chaty. Čas potrebný na dosiahnutie vrcholu označíme t_V.

Rýchlosť výstrelu v_0 určíme pomocou vzťahov

$$x_V = v_0 t_V \cos\alpha , \qquad y_V = h_V = v_0 t_V \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_V^2 , \qquad v_{yV} = v_0 \sin\alpha - g t_V = 0 .$$

Najprv vylúčime čas $t_V = \dfrac{v_0}{g}\sin\alpha$

$$h_V = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} , \qquad x_V = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\frac{\sin^2\alpha}{\tan\alpha} = \frac{2h_V}{\tan\alpha} .$$

Ďalej vylúčime uhol α

$$v_0^2 = 2 g h_V \left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) = \frac{g}{2h_V}\left(x_V^2 + 4h_V^2\right),$$

odkiaľ

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2h_V}\left[\left(d + \frac{a}{2}\right)^2 + 4h_V^2\right]} .$$

c) V predchádzajúcej časti sme ukázali, že rýchlosť v_0 je rastúcou funkciou d. Ak chceme znížiť v_0 na minimum, musíme zmenšovať vzdialenosť d. Stále platí požiadavka najvyššieho bodu trajektórie totožného s vrcholom V. Pri zmenšovaní d sa trajektória približuje okraju strechy B. Medzný prípad predstavuje prechod guľky bodmi B a V.

Súradnice bodu B sú $x_B = d - a\cos\gamma$ a $y_B = a\sin\gamma$.

Pre body B a V trajektórie máme

$$x_B = v_{0m} t_B \cos\alpha_m , \quad y_B = v_{0m} t_B \sin\alpha_m - \frac{1}{2} g t_B^2 ,$$

$$x_V = v_{0m} t_V \cos\alpha_m , \quad y_V = v_{0m} t_V \sin\alpha_m - \frac{1}{2} g t_V^2 ,$$

$$v_{ym} = v_{0m} \sin\alpha_m - g t_V = 0 .$$

Odtiaľ máme

$$t_V = \frac{v_{0m}}{g}\sin\alpha_m , \qquad y_V = \frac{v_{0m}^2}{2g}\sin^2\alpha_m \quad x_V = \frac{v_{0m}^2}{g}\sin\alpha_m\cos\alpha_m .$$

Z geometrického tvaru profilu chaty poznáme hodnoty y_V, y_B, $x_V - x_B$.

Pre rozdiely máme $y_V - y_B = a\sin\delta$ a $x_V - x_B = a\cos\delta$.

Pre časy v jednotlivých bodoch potom máme

$$t_V - t_B = \frac{x_V - x_B}{v_{0m}\cos\alpha_m} = \frac{a\cos\delta}{v_{0m}\cos\alpha_m}$$

$$t_V + t_B = 2t_V - \left(t_V - t_B\right) = \frac{2v_{0m}\sin\alpha_m}{g} - \frac{a\cos\delta}{v_{0m}\cos\alpha_m} .$$

Pre rozdiel výšok bodov B a V dostávame

$$y_V - y_B = \left(t_V - t_B\right) v_{0m}\sin\alpha_m - \frac{g}{2}\left(t_V - t_B\right)\left(t_V + t_B\right)$$

a po dosadení

$$y_V - y_B = \frac{a\cos\delta}{v_{0m}\cos\alpha_m} v_{0m}\sin\alpha_m - \frac{g}{2}\frac{a\cos\delta}{v_{0m}\cos\alpha_m}\left(\frac{2v_{0m}\sin\alpha_m}{g} - \frac{a\cos\delta}{v_{0m}\cos\alpha_m}\right)$$

a po dosadení za $y_V - y_B$ a úprave

$$v_{0m}^2\cos^2\alpha_m = \frac{g\,a}{2}\frac{\cos^2\delta}{\sin\delta}\,.$$

S uvážením vzťahu pre maximálnu výšku

$$v_{0m}^2\sin^2\alpha_m = 2g\,y_V = 2gh_V = 2g\,a\left(\sin\gamma + \sin\delta\right)$$

určíme minimálnu začiatočnú rýchlosť vrhu

$$v_{0m} = \sqrt{v_{0m}^2\cos^2\alpha_m + v_{0m}^2\sin^2\alpha_m} = \sqrt{2g\,a}\sqrt{\frac{\cos^2\delta}{4\sin\delta} + \sin\delta + \sin\gamma}$$

a uhol vrhu

$$\alpha_m = \arctan\sqrt{\frac{v_{0m}^2\sin^2\alpha_m}{v_{0m}^2\cos^2\alpha_m}} = \arctan\sqrt{\frac{4\left(\sin\gamma + \sin\delta\right)\sin\delta}{\cos^2\delta}}\,.$$

Pre vzdialenosť d_m miesta výstrelu dostávame

$$d_m = x_V - \frac{a}{2} = v_{0m}\cos\alpha_m\, t_V - \frac{a}{2} = \frac{1}{g}\left(v_{0m}\cos\alpha_m\right)\left(v_{0m}\sin\alpha_m\right) - \frac{a}{2}\,,$$

a po dosadení

$$d_m = a\left[\sqrt{\frac{\cos^2\delta}{\sin\delta}\left(\sin\gamma + \sin\delta\right)} - \frac{1}{2}\right].$$

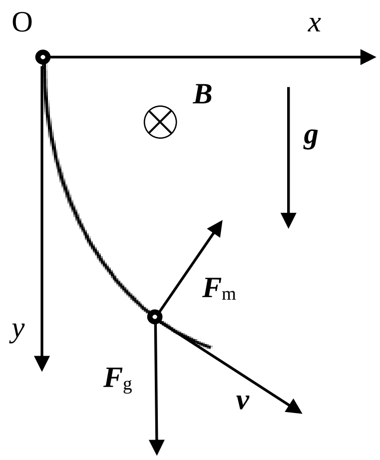
Pre dané hodnoty $v_{0m} \approx 15{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\alpha_m \approx 1{,}17$ rad $\approx 67{,}0°$, $d_m \approx 5{,}26$ m.

Z výsledku $v_{01} > v_{0m}$ je zrejmé, že delo je schopné prestreliť chatu ponad jej vrchol na druhú stranu.

2. Pád v magnetickom poli

Riešenie:

a) Po uvoľnení začne častica padať zvislo nadol pod účinkom tiažovej sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\,\boldsymbol{g}$. Keď sa jej rýchlosť zväčšuje, začne narastať sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{m} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, ktorou magnetické pole pôsobí na časticu, a začne časticu vychyľovať zo zvislého smeru kolmo na vektor $\boldsymbol{B}$ a vektor $\boldsymbol{v}$ rýchlosti pohybu, obr. RA–2. S poklesom častice jej rýchlosť narastá, a tým narastá aj magnetická sila. Konkrétny tvar trajektórie dostaneme riešením pohybovej rovnice.



Obr. RA–2

b) Pohybová rovnica častice je

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_\mathrm{g} + \boldsymbol{F}_\mathrm{m} = m\boldsymbol{g} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\,.$$

Pre $\boldsymbol{B} = B\,\boldsymbol{e}_z$ ($\boldsymbol{e}_z$ je jednotkový vektor v smere osi z) vyjadríme zložky zrýchlenia

$$a_x = \frac{q}{m} v_y B \tag{1}$$

a $$a_y = g - \frac{q}{m} v_x B\,. \tag{2}$$

V oboch smeroch je pohyb nerovnomerne zrýchlený. Rýchlosť získame integráciou zrýchlenia

$$v_x = \int_0^t a_x \,\mathrm{d}t = \frac{qB}{m}\int_0^t v_y \,\mathrm{d}t = \frac{qB}{m} y \tag{3}$$

a $$v_y = \int_0^t a_y \,\mathrm{d}t = g\,t - \frac{qB}{m}\int_0^t v_x \,\mathrm{d}t = g\,t - \frac{qB}{m} x\,. \tag{4}$$

Rýchlosť v_x dosadíme do vzťahu pre zrýchlenie a_y

$$a_y = \ddot{y} = g - \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y\,, \text{ alebo } \ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = g\,, \tag{5}$$

čo je diferenciálna rovnica pre súradnicu y.

Možností jej riešenia je niekoľko:

i) Funkcia, ktorá tejto rovnici vyhovuje, má všeobecný tvar

$$y = C + A\sin\left(\omega t + \alpha\right). \tag{6}$$

Po dosadení do diferenciálnej rovnice, pričom $\ddot{y} = -\,\omega^2 A\sin\left(\omega t + \alpha\right)$, máme

$$-\omega^2 A\sin\left(\omega t + \alpha\right) + \left(\frac{qB}{m}\right)^2\left[C + A\sin\left(\omega t + \alpha\right)\right] = g\,,$$

odkiaľ dostávame $$\omega = \frac{qB}{m} \text{ a } C = g\left(\frac{m}{qB}\right)^2 = \frac{g}{\omega^2}\,. \tag{7}$$

Konštanty A a α určíme neskôr zo začiatočných podmienok.

ii) Druhou možnosťou je presunúť g na pravej strane na ľavú stranu zavedením pomocnej súradnice w tak, aby $\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y - g = \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \left[y - \left(\frac{m}{qB}\right)^2 g\right] = \left(\frac{qB}{m}\right)^2 w = 0$,

kde $w = y - \left(\frac{m}{qB}\right)^2 g$ a po zderivovaní 2x $\ddot{w} = \ddot{y}$. Rovnica dostáva tvar $\ddot{w} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 w = 0$,

čo rovnica harmonického kmitavého pohybu $w = A\sin(\omega t + \alpha)$, kde $\omega = \frac{qB}{m}$, čo je rovnaký výsledok ako (6) a (7).

iii) Tretia možnosť je rovnicu (5) zderivovať, pričom $\dot{y} = v_y$ a $\ddot{y} = \dot{v}_y$. Rovnica dostáva tvar

$\ddot{v}_y + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0$, čo je rovnica pre harmonickú časovú závislosť rýchlosti v_y

$v_y = A' \sin(\omega t + \alpha')$.

Súradnica

$$y = \int_0^t v_y \, \mathrm{d}t = A' \int_0^t \sin(\omega t + \alpha')\mathrm{d}t = -\frac{A'}{\omega}\left[\cos(\omega t + \alpha') - \cos\alpha'\right] = \frac{A'\cos\alpha'}{\omega} - \frac{A'}{\omega}\cos(\omega t + \alpha'),$$

čo možno prepísať na tvar (6), ak $\frac{A'\cos\alpha'}{\omega} = C$, $\frac{A'}{\omega} = A$ a $\alpha' + \frac{\pi}{2} = \alpha$.

Nech zvolíme ktorúkoľvek metódu, výsledok je

$$y = \frac{g}{\omega^2} + A\sin(\omega t + \alpha).$$

Súradnicu x určíme z rovnice (4)

$$x = \frac{mg}{qB}t - \frac{m}{qB}v_y = \frac{mg}{qB}t - \frac{m}{qB}\omega A\cos(\omega t + \alpha) = \frac{mg}{qB}t - A\cos(\omega t + \alpha).$$

Určíme konštanty A a α zo začiatočných podmienok $t = 0$, $x = y = 0$. Po dosadení

$x = 0 = A\cos\alpha$. Pre $A \neq 0$ je $\cos \alpha = 0$, a teda $\alpha = \pm \pi/2$.

$y = 0 = \frac{g}{\omega^2} + A\sin\alpha$. Pre $A > 0$ je $\sin \alpha < 0$, tzn. $\alpha = -\pi/2$ a $A = \frac{g}{\omega^2}$.

Pre súradnice tak dostávame

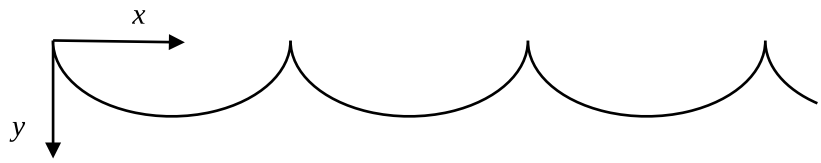
$$x = \frac{g}{\omega^2}(\omega t - \sin\omega t) \quad \text{a} \quad y = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

Vidíme, že ide o superpozíciu rovnomerného pohybu vo vodorovnom smere s rýchlosťou $v_s = \frac{g}{\omega}$ a pohybu po kružnici s polomerom $R = \frac{g}{\omega^2}$, stredom v hĺbke $y_S = \frac{g}{\omega^2}$ a uhlovou rýchlosťou ω.

Pozn.: Podobne ako bod na kruhovej obruči, ktorá sa pohybuje valivým pohybom po vodorovnej rovinnej ploche. Vytvorená krivka sa nazýva cykloida.

Trajektória sa skladá z oblúkov, ktoré na seba nadväzujú vo vodorovnom smere, obr. RA–3. Čas, za ktorý častica prejde jeden oblúk $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$. Za tento čas sa častica posunie vo vodorovnom smere o $L = v_S T = \frac{g}{\omega}\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi g \left(\frac{m}{qB}\right)^2$.

Najnižší bod trajektórie je v hĺbke $y_m = 2R = 2\frac{g}{\omega^2} = 2g\left(\frac{m}{qB}\right)^2$.



Obr. RA-3

Je možné alternatívne riešenie, ktoré vychádza z nasledujúcej úvahy:

Uvažujme inerciálnu vzťažnú sústavu S′, ktorá sa pohybuje v smere osi x rýchlosťou $\boldsymbol{V} = V \boldsymbol{e}_x$. V tejto sústave je prítomné indukované elektrické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} = -V B\, \boldsymbol{e}_y$. Rýchlosť V volíme tak, aby sila tohto poľa na časticu $\boldsymbol{F}_e' = q\,\boldsymbol{E}'$ kompenzovala silu tiažovú, takže $m g = q V B = 0$, odkiaľ $V = \frac{mg}{qB}$.

V sústave S′ je začiatočná rýchlosť častice (v čase $t = 0$) $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{V} = -\frac{mg}{qB}\boldsymbol{e}_x$ a pohyb častice určuje iba sila magnetického poľa $\boldsymbol{F}' = q\,\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}$, čo vedie na rovnomerný pohyb po kružnici s polomerom

$$R = \frac{m v'}{qB} = \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

a stredom v bode $(x', y') = (0, R)$ uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{v'}{R} = \frac{qB}{m}$.

Okamžitú polohu vyjadrujú súradnice

$$x'(t) = -R\sin\omega t$$

$$y'(t) = R - R\cos\omega t\,.$$

Súradnice v pôvodnej vzťažnej sústave sú

$$x(t) = x'(t) + V t = -R\sin\omega t + \frac{mg}{qB} t = R\left(\omega t - \sin\omega t\right)$$

a $\quad y(t) = y'(t) = R\left(1 - \cos\omega t\right)$.

Zložky rýchlosti a zrýchlenia dostávame derivovaním vzťahov pre súradnice

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \omega R\left(1 - \cos\omega t\right) \qquad v_y(t) = \dot{y}(t) = \omega R \sin\omega t$$

$$a_x(t) = \dot{v}(t) = \omega^2 R \sin\omega t \qquad a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \omega^2 R\cos\omega t\,.$$

Z týchto vzťahov určíme parametre požadované v zadaní T, L, y_m a tvar trajektórie.

Pozn.:
Ak zavedieme parameter $\alpha = \omega\, t$, zapíšeme súradnice v tvare

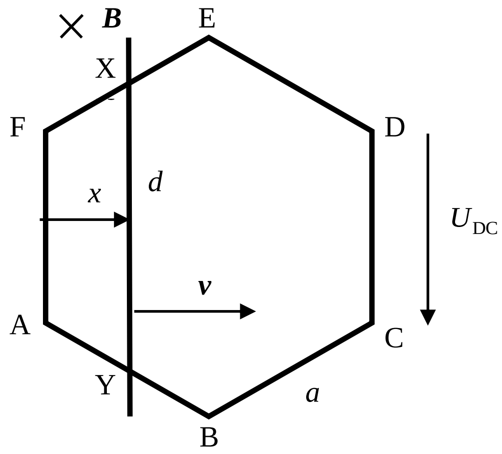
$$x(\alpha) = R\left(\alpha - \sin\alpha\right) \qquad\qquad y(\alpha) = R\left(1 - \cos\alpha\right),$$

čo sú parametrické rovnice cykloidy.

3. Magnetická indukcia

Riešenie:

Na dĺžke d medzi kontaktmi XY priameho úseku vodiča (obr. RA–4), ktorý sa pohybuje kolmo na smer homogénneho magnetického poľa $\boldsymbol{B}$ rýchlosťou v, sa indukuje elektromotorické napätie (EMN) $\mathcal{E} = v\,B\,d$. To sa v otvorenom obvode prejaví vznikom rovnako veľkého elektrického napätia na jeho svorkách a v uzatvorenom obvode indukovaným prúdom $I_\mathrm{i} = \mathcal{E}/R$, kde R je odpor celého uzatvoreného obvodu, vrátane odporu vodiča, v ktorom sa elektromotorické napätie indukuje.



Obr. RA–4

a) Ak označíme x posunutie vodiča zo začiatočnej polohy z polohy obsahujúcej stranu AF, je dĺžka vodiča medzi bodmi XY na šesťuholníku

$$d\left(x\right) = a + 2\,x\tan 30° = a + \frac{2}{\sqrt{3}}\,x \quad \text{pre} \quad 0 \le x \le a\cos 30°.$$

Indukované EMN pre $x \le a \cos 30°$, tzn. od AF do BE

$$\mathcal{E} = v\,B\,d\,(x) = v\,B\left(a + \frac{2}{\sqrt{3}}\,x\right)$$

Odpor úseku priameho vodiča $R_\mathrm{i} = d\,(x)\,r$. Medzi bodmi X a Y sú dve vonkajšie vetvy: XFAY a XEDCBY s dĺžkami

$$l_1\left(x\right) = a + 2\,\frac{x}{\cos 30°} = a + \frac{4}{\sqrt{3}}\,x\;, \qquad l_2\left(x\right) = 3a + 2\left(a - \frac{x}{\cos 30°}\right) = 5a - \frac{4}{\sqrt{3}}\,x$$

a odpormi $R_1 = r\,l_1$ a $R_2 = r\,l_2$. Celkový odpor uzatvoreného obvodu

$$R = R_\mathrm{i} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = r\left[a + \frac{2}{\sqrt{3}}\,x + \frac{\left(a + \frac{4}{\sqrt{3}}\,x\right)\left(5a - \frac{4}{\sqrt{3}}\,x\right)}{6a}\right] = r\,\frac{11a^2 + \frac{28}{\sqrt{3}}\,ax - \frac{16}{3}\,x^2}{6a}.$$

Pohybujúcim sa vodičom prechádza medzi bodmi XY indukovaný prúd

$$I_\mathrm{i} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{v\,B}{r}\,\frac{6a\left(a + \frac{2}{\sqrt{3}}\,x\right)}{11a^2 + \frac{28}{\sqrt{3}}\,a\,x - \frac{16}{3}\,x^2}.$$

Na vodič s prúdom I_i pôsobí magnetické pole brzdiacou silou $F_m = B\,I_i\,d$. Na udržanie rovnomerného pohybu treba pôsobiť na vodič rovnako veľkou vonkajšou silou opačného smeru

$$F = B\,I_i\,d = \frac{v B^2}{r}\,\frac{6a\left(a+\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}{11a^2+\frac{28}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{16}{3}x^2}\;.$$

Pre krajnú polohu AF: $x_1 = 0$, $F_1 = \frac{6\,v B^2 a}{11\,r}$,

pre BE: $x_2 = a\cos 30° = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $F_2 = \frac{8v B^2 a}{7r}$.

Pre dané hodnoty $F_1 \approx 87$ mN, $F_2 \approx 182$ mN.

b) Prúd I_i sa delí medzi obe vetvy s odpormi R_1 a R_2. Prúd vetvou s odporom R_2

$$I_2 = I_i\,\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{\mathcal{E}\,R_1}{R_i\left(R_1+R_2\right)+R_1R_2} = \frac{vB}{r}\,\frac{a^2+\frac{6}{\sqrt{3}}a\,x+\frac{8}{3}x^2}{11a^2+\frac{28}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{16}{3}x^2}$$

a napätie

$$U_{DC} = r\,a\,I_2 = vBa\,\frac{a^2+\frac{6}{\sqrt{3}}a\,x+\frac{8}{3}x^2}{11a^2+\frac{28}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{16}{3}x^2}\,.$$

Prúd vetvou s odporom R_1 je

$$I_1 = I_i\,\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{\mathcal{E}\,R_2}{R_i\left(R_1+R_2\right)+R_1R_2} = \frac{vB}{r}\,\frac{5a^2+\frac{6}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{8}{3}x^2}{11a^2+\frac{28}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{16}{3}x^2}$$

a napätie

$$U_{AF} = r\,a\,I_1 = a\,vB\,\frac{5a^2+\frac{6}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{8}{3}x^2}{11a^2+\frac{28}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{16}{3}x^2}\,.$$

Pre krajné polohy: $x_1 = 0$, $U_{DC1} = \frac{a\,vB}{11}$ a $U_{AF1} = \frac{5}{11}a\,vB$,

pre $x_2 = a\cos 30° = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $U_{DC2} = \frac{2a\,vB}{7}$ a $U_{AF2} = \frac{2a\,vB}{7}$.

Pre dané hodnoty $U_{DC1} \approx 1{,}2$ mV, $U_{AF1} \approx 5{,}9$ mV, $U_{DC2} = U_{AF2} \approx 3{,}7$ mV.

c) Výkon môžeme určiť dvomi spôsobmi. Teplo uvoľnené v obvode

$$P_t = R\,I_i^2 = \frac{v^2B^2}{r}\,\frac{6a\left(a+\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}{11a^2+\frac{28}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{16}{3}x^2}$$

alebo ako mechanický výkon vonkajšej sily, ktorý sa v procese mení na teplo

$$P_{\mathrm{m}} = F\,v = \frac{v^2 B^2}{r}\,\frac{6a\left(a+\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}{11a^2+\frac{28}{\sqrt{3}}a\,x-\frac{16}{3}x^2}\;.$$

Pre krajné polohy: $x_1 = 0$, $P_1 = \frac{6\,a\,v^2 B^2}{11\,r}$, pre $x_2 = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $P_2 = \frac{8\,a\,v^2 B^2}{7\,r}$.

Pre dané hodnoty: $P_1 \approx 64{,}2$ mW, $P_2 \approx 134{,}5$ mW.

4. Odraz svetla na doštičke

Riešenie:

a) Pre dopad lúča na sklenenú platničku zo vzduchu je n_1 = 1,00, $n_2 = n$ máme

$$R_\perp = \left[\frac{\cos\alpha - n\cos\beta}{\cos\alpha + n\cos\beta}\right]^2 \quad \text{a} \quad R_\parallel = \left[\frac{n\cos\alpha - \cos\beta}{n\cos\alpha + \cos\beta}\right]^2 .$$

Pre nulový odraz kolmej zložky ($\perp$) lineárne polarizovaného vlnenia máme $\cos\alpha = n\cos\beta$,

pričom podľa zákona lomu $\sin\alpha = n\sin\beta$, teda $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta$, tzn. $\tan\alpha = \tan\beta$.

Rovnica pre $\alpha \neq \beta$ nemá riešenie v rozsahu $\alpha, \beta \leq \pi/2$ rad.

Pre rovnobežnú zložku lineárne polarizovaného vlnenia $\cos\beta = n\cos\alpha$, pričom $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$,

a teda $\cos\beta\sin\beta = \sin\alpha\cos\alpha$, odkiaľ $\tan\beta = \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 \tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{n^2}$, resp. $\sin 2\beta = \sin 2\alpha$.

Pre $\alpha \neq \beta$ a $\alpha, \beta \leq \pi/2$ rad je riešením $2\alpha_1 = \pi - 2\beta_1$ alebo $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ a naviac platí $\sin\alpha_1 = \cos\beta_1$ a $\cos\alpha_1 = \sin\beta_1$. Z toho vyplýva, že odrazený a lomený lúč zvierajú uhol $\pi/2$ rad. Po dosadení do zákona lomu máme $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1 = n\cos\alpha_1$,

odkiaľ $\tan\alpha_1 = n$, resp. $\tan\beta_1 = \frac{1}{n}$.

Pre uhol dopadu α_1 (Brewsterov uhol) je koeficient odrazu rovnobežnej zložky polarizácie ($\parallel$) nulový ($R_\parallel = 0$).

Pre kremenné sklo α_1 = 57,07°..

b) Pre uhol α_1 je koeficient odrazu $R_{\parallel 1}$ na hornej a $R_{\parallel 2}$ na dolnej strane platničky

$$R_{\parallel 1} = \left[\frac{n\cos\alpha_1 - \cos\beta_1}{n\cos\alpha_1 + \cos\beta_1}\right]^2 = 0 \quad \text{a} \quad R_{\parallel 2} = \left[\frac{n\cos\beta_1 - \cos\alpha_1}{n\cos\beta_1 + \cos\alpha_1}\right]^2 = 0 \; .$$

Pre kolmú zložku polarizácie ($\perp$) dostaneme na oboch rozhraniach

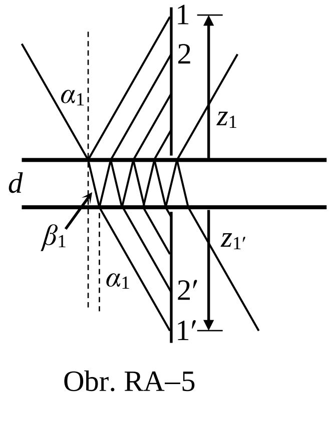
$$R_{\perp 1} = R_{\perp 2} = \left[\frac{\cos\alpha_1 - n\cos\beta_1}{\cos\alpha_1 + n\cos\beta_1}\right]^2 = \left[\frac{\cos\alpha_1 - n\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1 + n\sin\alpha_1}\right]^2 = \left[\frac{1 - n\tan\alpha_1}{1 + n\tan\alpha_1}\right]^2 = \left[\frac{1 - n^2}{1 + n^2}\right]^2$$

Pre kremenné sklo $R_{\perp 1} = R_{\perp 2} = 0{,}167$.

Pre uhol dopadu α_1 sa rovnobežná zložka ($\parallel$) lineárne polarizovaného svetla neodráža na hornom rozhraní vzduch-sklo ani na dolnom rozhraní sklo-vzduch, tzn. svetlo prechádza cez platničku bez straty, a teda $T_\parallel = 1{,}00$.

c) Rovnobežná zložka polarizovaného lúča prejde platničkou bez odrazu a na tienidle vznikne iba jedna stopa $1'$, obr. RA–5 .

Pre kolmú zložku ($\perp$) polarizovaného lúča vznikne séria stôp pod aj nad platničkou. Na obr. RA–5 je znázornený prechod laserového lúča platničkou a vznik obrazca na tienidle.



Obr. RA–5

Odraz lúča: Prvý odrazený lúč vytvorí stopu 1 vo vzdialenosti z_1 od povrchu platničky, kde $z_1 = \frac{l}{\tan\alpha_1} = \frac{l}{n}$.

Prvý prechádzajúci lúč sa láme pod uhlom β_1. Spodný povrch platničky dosiahne v bode, ktorý je posunutý v smere k tienidlu o $x_1 = d\,\tan\beta_1 = \frac{d}{n}$.

Prechod lúča: Po prechode rozhraním sklo-vzduch je uhol lomu α_1 a stopa na tienidle sa vytvorí vo vzdialenosti $z_{1'}$ od spodného povrchu platničky

$$z_{1'} = \frac{l - x_1}{\tan\alpha_1} = \frac{l}{n} - \frac{d}{n^2}.$$

Vzdialenosť stredov krajných stôp 1–1′ je

$$d_2 = z_1 + d + z_{1'} = 2\frac{l}{n} + d\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \approx 26{,}2 \text{ cm}.$$

Z obr. RA–5 je zrejmé, že vzdialenosť susedných stôp nad a pod platničkou je rovnaká.

$$d_1 = z_1 - z_2 = \frac{l}{n} - \frac{l - 2x_1}{n} = \frac{2x_1}{n} = \frac{2d}{n^2} \approx 4{,}2 \text{ mm}.$$

d) Najintenzívnejšia stopa nad sklenenou doštičkou je stopa 1, ktorá je na tienidle najďalej od sklenenej doštičky. Lúč 1 absolvoval jeden odraz a teda $I_1 = I_0\, R_{\perp 1} = I_0\, R_\perp$. Lúč 2 najprv prejde rozhraním do doštičky, odrazí sa od dolného rozhrania a prvým rozhraním prejde nad doštičku, teda $I_2 = I_0\left(1 - R_{\perp 1}\right) R_{\perp 2}\left(1 - R_{\perp 1}\right) = I_0\, R_\perp\left(1 - R_\perp\right)^2$. Pomer intenzít susedných lúčov

$$\left(p_1\right)_{12} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\left(1 - R_\perp\right)^2} = \frac{1}{\left(1 - R_\perp\right)^2} = \left[\frac{\left(1 + n^2\right)^2}{\left(1 + n^2\right)^2 - \left(1 - n^2\right)^2}\right]^2 = \left(\frac{1 + n^2}{2\,n}\right)^4 \approx 1{,}44.$$

Medzi ďalšími susednými lúčmi sú navyše vždy dva vnútorné odrazy, tzn. $I_{n+1} = R_\perp^2\, I_n$

$$\left(p_1\right)_{23} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{1}{\left(R_{\perp 2}\right)^2} = \left(p_1\right)_{34} = \cdots = \left(\frac{1 + n^2}{1 - n^2}\right)^4 \approx 35{,}7. \qquad \text{(A)}$$

Medzi všetkými susednými prechádzajúcimi lúčmi sú vždy dva vnútorné odrazy, tzn. pomer intenzít dvoch susedných lúčov pod doštičkou je daný vzťahom (A).

Prvý prechádzajúci lúč absolvuje dva prechody rozhraním (horným a dolným), takže $I_{1'} = I_0\left(1 - R_\perp\right)^2$ a pomer intenzít krajných stôp

$$p_2 = \frac{I_1}{I_{1'}} = \frac{R_\perp}{\left(1 - R_\perp\right)^2} = \left(\frac{1 - n^4}{4\,n^2}\right)^2 \approx 0{,}241.$$

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Teoretické úlohy celoštátneho kola kategórie A*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (1, 3, 4), Patrik Lamoš (2)
Spracovanie návrhov úloh a riešení:	Ivo Čáp
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021