61. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2019/2020
kategória A – krajské kolo

Riešenie úloh

1. Guľa na naklonenej rovine

Riešenie:

a) Keďže ide o valivý pohyb, pri ktorom nedochádza s stratám mechanickej energie, použijeme zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2}m v_1^2 + \frac{1}{2}J\,\omega_1^2 = m\,g\,H\,,\ \text{kde } v_1 = r\,\omega_1.$$

Po dosadení za moment zotrvačnosti dostávame

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}g\,H}\,.\ \text{Pre dané hodnoty } v_1 \approx 2{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ 2 b

Od okraja stola guľôčka padá

$$\frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 = m\,g\,h\,,$$

odkiaľ máme

$$v_2 = \sqrt{2\,g\,h\left(1+\frac{5}{7}\frac{H}{h}\right)}\,.\ \text{Pre dané hodnoty } v_2 \approx 5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ 2 b

b) Od okraja stola sa guľôčka pohybuje šikmým vrhom nadol. Začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}_1$ zviera s vodorovným smerom uhol α, pre ktorý platí $\sin\alpha = H / L$.
V zvislom smere ide o voľný pád so zrýchlením g a začiatočnou rýchlosťou $v_1 \sin\alpha$

$$h = v_1\,\Delta t \sin\alpha + \frac{1}{2}g\,\Delta t^2\,. \qquad (1)$$

Za čas Δt sa guľôčka posunie vo vodorovnom smere rovnomerným pohybom rýchlosťou $v_1 \cos\alpha$

$$d = v_1\,\Delta t \cos\alpha\,. \qquad (2)$$

Z (2) vyjadríme čas Δt a dosadíme do (1). Dostávame kvadratickú rovnicu

$$d^2 + 2\frac{10}{7}\sin\alpha\cos\alpha\,H\,d - \frac{20}{7}h\,H\cos^2\alpha = 0\,,$$

ktorá má riešenie

$$d = \frac{10}{7}\frac{H^2}{L}\sqrt{1-\frac{H^2}{L^2}}\left[-1+\sqrt{1+\frac{7}{5}\frac{h}{H}\frac{L^2}{H^2}}\right].$$

Druhé riešenie je záporné, a teda nevyhovuje.
Pre dané hodnoty $d \approx 71$ cm. 3 b

c) Za čas t_1 prejde guľôčka dráhu L a získa rýchlosť v_1. Ide o rovnomerne zrýchlený pohyb, pre ktorý platí

$$L = \frac{1}{2}v_1\,t_1\,,\ \text{odkiaľ máme } t_1 = \frac{2L}{v_1} = L\sqrt{\frac{14}{5\,g\,H}}\,.\ \text{Pre dané hodnoty } t_1 \approx 0{,}68\ \text{s}.$$ 1 b

Čas pádu Δt vyjadríme zo vzťahu (2)

$$\Delta t = \frac{d}{v_1 \cos\alpha} = \frac{d}{\sqrt{\frac{10}{7} g H} \cos\alpha} .$$

Čas dopadu

$$t_2 = t_1 + \Delta t = L \sqrt{\frac{14}{5 g H}} \left[1 + \frac{5}{7} \frac{H^2}{L^2} \left(\sqrt{1 + \frac{7}{5} \frac{h}{H} \frac{L^2}{H^2}} - 1 \right) \right].$$

Pre dané hodnoty t_2 = 1,0 s. 2 b

2. Kmitavá sústava

Riešenie:

a) V začiatočnej polohe pôsobí na dolný piest tiažová sila telesa $F_g = m\,g$.

Tlak vzduchu vo valci

$p_0 = p_a - \frac{m g}{S}$. Pre dané hodnoty $p_0 \approx$ 88,7 kPa. 1 b

b) Ak pôsobíme na teleso silou $\boldsymbol{F}$ smerom nadol, dôjde k posunutiu x telesa zo začiatočnej polohy, zmene dĺžky stĺpca vzduchu a predĺženiu y pružiny, pričom stĺpec vzduchu sa predĺži na $l_x = l_0 + \Delta l$.

Ak neuvažujeme hmotnosti piestov a vzduchu vo valci, je predĺženie pružiny, a tým aj posunutie horného piestu,

$$y = \frac{F}{k_p} .$$

Predĺženie stĺpca vzduchu $\Delta l = x - y$.

Tlak vzduchu vo valci

$$p_x = p_a - \frac{F + mg}{S} = p_a - \frac{mg}{S} - \frac{F}{S} = p_0 - \frac{F}{S} .$$

Keďže vzduch vo valci je tepelne izolovaný, je zmena stavu vzduchu vo valci adiabatická, a platí

$$p_0 (S l_0)^\kappa = p_x (S l_x)^\kappa .$$

Po dosadení

$$p_0 l_0^\kappa = \left(p_0 - \frac{F}{S} \right) l_0^\kappa \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right)^\kappa .$$

Pre malé výchylky $\frac{\Delta l}{l_0} << 1$ použijeme približný vzťah $\left(1 + \frac{x - y}{l_0} \right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{\Delta l}{l_0}$.

$$1 - \frac{F}{p_0 S} = \frac{1}{1 + \kappa \frac{\Delta l}{l_0}} \approx 1 - \kappa \frac{\Delta l}{l_0} \text{, odkiaľ máme } F = \frac{\kappa p_0 S}{l_0} \Delta l = k_v \Delta l .$$

Vzduchový stĺpec predstavuje pružinu s tuhosťou $k_v = \frac{\kappa p_0 S}{l_0}$.

Pružiny sú spojené do série. Na obe pružiny pôsobí rovnaká sila F a platí

$$k_\mathrm{v}\,\Delta l = k_\mathrm{p}\,y = k_\mathrm{p}\left(x-\Delta l\right)$$, odkiaľ máme

$$\Delta l = \frac{k_\mathrm{p}}{k_\mathrm{v}+k_\mathrm{p}}\,x = \frac{k_\mathrm{p}}{\dfrac{\kappa\,p_0\,S}{l_0}+k_\mathrm{p}}\,x = \frac{k_\mathrm{p}\,l_0}{\kappa\left(p_\mathrm{a}\,S-m\,g\right)+k_\mathrm{p}\,l_0}\,x\,.$$

Pre dané hodnoty $\Delta l_1 \approx 2{,}78$ mm. 3 b

c) Stĺpec vzduchu a pružina v sérii predstavujú jednu pružinu s výslednou tuhosťou

$$k^* = \frac{k_\mathrm{p}\,k_\mathrm{v}}{k_\mathrm{p}+k_\mathrm{v}} = k_\mathrm{p}\,\frac{\kappa\,p_0\,S}{k_\mathrm{p}\,l_0+\kappa\,p_0\,S}\,.$$

Teleso s hmotnosťou kmitá na pružine s tuhosťou k^*. Doba kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_\mathrm{p}}\left(1+\frac{k_\mathrm{p}\,l_0}{\kappa\,p_0\,S}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}\left(1+\frac{1}{\kappa}\,\frac{k_\mathrm{p}\,l_0}{p_\mathrm{a}\,S-m\,g}\right)}$$

Pre dané hodnoty veličín $T \approx 0{,}507$ s. 3 b

Maximálnu rýchlosť v_0 má teleso pri prechode rovnovážnou polohou. Táto rýchlosť súvisí s amplitúdou x_m kmitov vzťahom $v_0 = \omega\,x_\mathrm{m}$.

(Druhá možnosť vychádza zo zákona zachovania energie $\frac{1}{2}m v_0^2 = \frac{1}{2}k^*\,x_\mathrm{m}^2$).

Amplitúda je

$$x_\mathrm{m} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{2\pi}T = v_0\sqrt{\frac{m}{k}\left(1+\frac{1}{\kappa}\,\frac{k\,l_0}{p_\mathrm{a}\,S-m\,g}\right)}$$. Pre dané hodnoty $x_\mathrm{m} \approx 4{,}03$ mm. 2 b

Z výsledku vidíme, že podmienka malých kmitov je splnená. 1 b

3. LHC

Riešenie:

a) Kinetická energia

$$E_{\mathrm{kp}} = \left(m_{\mathrm{pr}} - m_{\mathrm{p}}\right)c^2\text{, odkiaľ máme } m_{\mathrm{pr}} = m_{\mathrm{p}} + \frac{E_{\mathrm{kp}}}{c^2} \approx \frac{E_{\mathrm{kp}}}{c^2}.$$

Pre dané hodnoty veličín $m_{\mathrm{p}} \approx 1{,}24\times10^{-23}$ kg $\approx 7{,}50\times10^{3}\,u$. 2 b

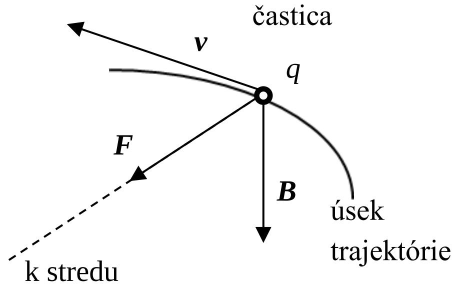
Relativistická hmotnosť protónu

$$m_{\mathrm{p}} = \frac{m_{\mathrm{p0}}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{\mathrm{p}}}{c}\right)^2}}\text{, odkiaľ vyjadríme } \frac{c-v_{\mathrm{p}}}{c} = 1-\sqrt{1-\left(\frac{m_{\mathrm{p0}}}{m_{\mathrm{p}}}\right)^2} = 1-\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{E_{\mathrm{kp}}}{m_{\mathrm{p0}}\,c^2}\right)^2}}.$$

Pre dané hodnoty $\frac{c-v_{\mathrm{p}}}{c} \approx 9{,}00\times10^{-9}$. 2 b

b) Aby sa protón pohyboval po požadovanej kružnicovej trajektórii, musí byť vektor $\boldsymbol{B}$ kolmý na rovinu trajektórie. Potom sila magnetického poľa $\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, kde q je elektrický náboj častice, smeruje do stredu kružnicovej trajektórie.

Obrázok RA2–1. 1 b



Obr. RA2–1

Pri rovnomernom pohybe po kružnici je v rovnováhe odstredivá (zotrvačná) sila a magnetická sila

$$m_{\mathrm{pr}}\frac{v_{\mathrm{p}}^2}{r} = e\,v_{\mathrm{p}}\,B,$$

odkiaľ dostávame

$$E_{\mathrm{kp}} = \sqrt{\left(\frac{LecB}{2\pi}\right)^2 + m_{\mathrm{p}}^2c^4} - m_{\mathrm{p}}c^2\text{, odkiaľ dostávame}$$

$$B = \frac{m_{\mathrm{pr}}\,v_{\mathrm{p}}}{er} = 2\pi\frac{m_{\mathrm{pr}}\,v_{\mathrm{p}}}{eL} = \frac{2\pi c\,m_{\mathrm{p}}}{eL}\sqrt{\left(1+\frac{E_{\mathrm{kp}}}{m_{\mathrm{p}}\,c^2}\right)^2 - 1}.$$

Pre dané hodnoty $B \approx 5{,}5$ T. 2 b

c) Pre jadrá olova platí rovnaká rovnica ako pre protóny

$$m_{\mathrm{Pbr}}\frac{v_{\mathrm{Pb}}^2}{r} = Z\,e\,v_{\mathrm{Pb}}\,B\text{, kde } Z = 82,\ m_{\mathrm{Pb}} = A\,u,\ A = 208.$$

a po dosadení a úprave je kinetická energia

$$E_{\mathrm{kPb}} = \sqrt{\left(\frac{ZeBLc}{2\pi}\right)^2 + m_{\mathrm{Pb}}^2c^4} - m_{\mathrm{Pb}}c^2$$

Pre dané hodnoty veličín $E_{\mathrm{Pb}} \approx 9{,}18\times10^{-5}$ J ≈ 574 TeV. 2 b

d) Hmotnosť Higgsovho bozónu

$$m_{\mathrm{HB}} = \frac{126\times(1{,}60\times10^{-10}\ \mathrm{J})}{(3{,}00\times10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} \approx 2{,}24\times10^{-25}\ \mathrm{kg} \approx 134\ m_{\mathrm{p}}.$$ 1 b

4. Ionizačný detektor dymu

Riešenie:

a) Rovnice premeny

$$ {}^{241}_{95}\mathrm{Am} \to {}^{237}_{93}\mathrm{Np} + {}^{4}_{2}\alpha, \quad {}^{237}_{93}\mathrm{Np} \to {}^{233}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{4}_{2}\alpha, \quad {}^{233}_{91}\mathrm{Pa} \to {}^{233}_{92}\mathrm{U} + {}^{0}_{-1}\beta. $$ 1 b

V rovniciach sú uvedené nukleónové a protónové čísla izotopov. 1 b

b) Predpokladáme, že rýchlosť častice $v << c$.

$$ v = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}} $$, pre dané hodnoty $v_\alpha \approx 1{,}63\times10^{7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 1 b

Keďže táto rýchlosť o jeden rád menšia ako rýchlosť svetla vo vákuu, s dostatočnou presnosťou postačuje nerelativistický výpočet. 1 b

c) Určíme počet atómov Am vo vzorke AmO_2. Každá molekula obsahuje jeden atóm Am.

Molárna hmotnosť $M_{\mathrm{AmO2}} = (241 + 2\times16)\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Počet molekúl, a teda atómov Am,

$$ N = \frac{m}{M_{\mathrm{AmO2}}} N_{\mathrm{A}} $$, pre dané hodnoty $N \approx 7{,}28\times10^{14}$.

Aktivita amerícia vo vzorke

$$ A_{\mathrm{Am}} = \frac{\mathrm{d}N_\alpha}{\mathrm{d}t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{\mathrm{Am}}} N $$. Pre dané hodnoty $A_{\mathrm{Am}} \approx 37{,}0$ kBq. 3 b

d) Aktivita A_{Am} zodpovedá počtu vniknutý kladných, resp. záporných, iónov za sekundu. Ak všetky ióny dosiahnu elektródy, vytvorený prúd

$$ I = A_{\mathrm{Am}}\, e = \frac{\ln 2}{T_{\mathrm{Am}}} N e $$. Pre dané hodnoty $I \approx 5{,}92\times10^{-15}$ A = 5,92 fA. 2b

d) Počet ionizácií jednou časticou α

$$ n_i = \frac{I_{\mathrm{sk}}}{I} \approx 16{,}9 \approx 17. $$

Jedna α-častica vytvorí v ionizačnej komore približne 17 iónových párov. 1 b

61. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie A*

Autori návrhov úloh:	Kamil Bystrický (1), Ivo Čáp (2, 4), Ľubomír Konrád (3)
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020