61. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2019/2020
kategória D – domáce kolo
Riešenie úloh

Pozor: Zmena riešenia úlohy 2 - Raketa

1. Rozbeh metra

Riešenie:

a) Dĺžka vozňa

$$d = s\frac{N_2}{N_1} \approx 19{,}2\ \text{m}.$$ 1 b

Priemerná rýchlosť od začiatku pohybu do času t_n

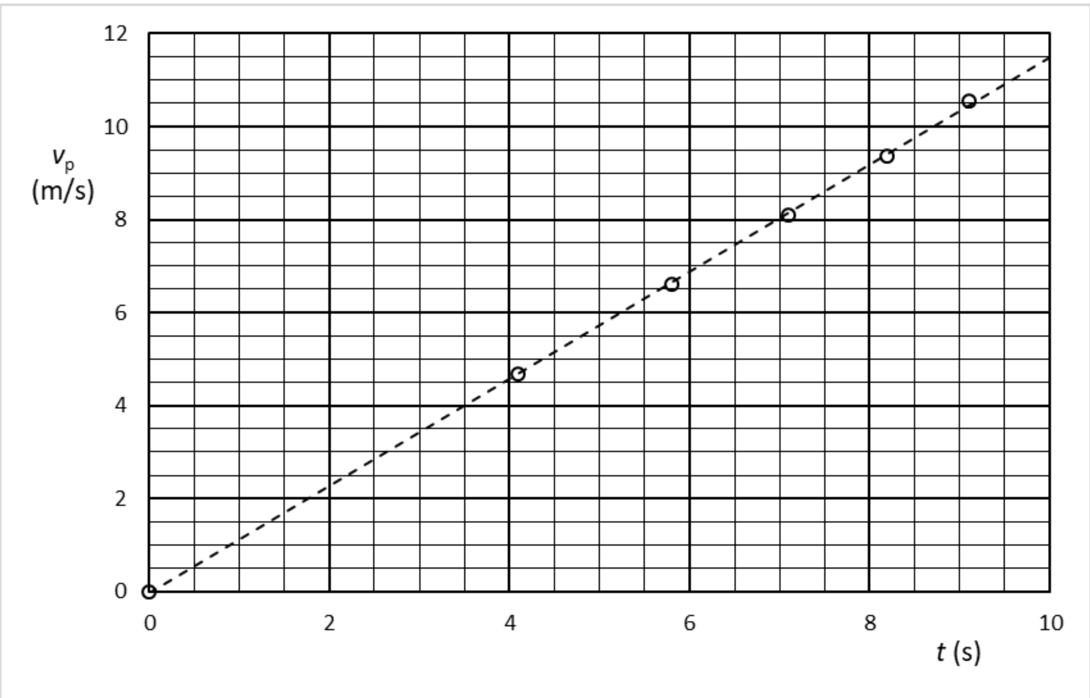
$$v_{pn} = \frac{nd}{t_n} = \frac{nsN_2}{N_1 t_n}$$. Jednotlivé hodnoty sú v tabuľke. 1 b

Tabuľka

Vozeň n	začiatok	1	2	3	4	5
Čas t_n (s)	0	4,10	5,80	7,10	8,20	9,10
v_{pn} (m/s)	0	4,68	6,62	8,11	9,37	10,55
v_n (m/s)	0	4,6	6,6	8,1	9,4	10,5

Správne vyplnená tabuľka 3 b

Graf 1



Správne zostrojený graf 2 b

Z grafu vidíme, že priemerná rýchlosť rastie rovnomerne s časom. Rozbeh vlaku možno považovať za rovnomerne zrýchlený pohyb. 1 b

b) Zrýchlenie pohybu určíme zo smernice k trendovej priamky.

Ak pohyb považujeme za rovnomerne zrýchlený, platí pre rýchlosť vzťah

$v = a\,t$, pričom stredná hodnota rýchlosti v intervale (0; t) v_p = ½ v. Z toho vyplýva $a = 2k$.

Smernicu určíme grafu 1. Trendová priamka prechádza bodmi (0; 0) a (11,5 m/s; 10,0 s). Smernica je potom k = 11,5/10,0 m/s^2 = 1,15 m/s^2 .

Priemerné zrýchlenie v čase sledovania pohybu a = 2,30 m/s^2. 1 b

Pre jednotlivé časy t_n určíme rýchlosť $v_n = a\ t_n$ a doplníme do tabuľky.

Z tabuľky vidíme, že platí približne $v_n \approx v_{pn}$. Odchýlky sú spôsobené nepresnosťou odčítania z grafu.

Vlak v stanici dosiahne rýchlosť $v_v \approx$ 21 m/s $\approx$ 76 km/h. 1 b

2. Raketa

Riešenie:

Raketa stúpala rovnomerne zrýchleným pohybom po dobu t_1 do výšky h_0, v ktorej dosiahla rýchlosť v_0, pričom platí

$$h_0 = \frac{1}{2} v_0 t_1 . \qquad (1) \qquad 1\ \text{b}$$

Po vypnutí motora pokračovala vrhom zvislým nahor so začiatočnou výškou h_0 a rýchlosťou v_0.
Pre výšku h, rýchlosť v a čas t po vypnutí motora platí

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{a} \quad v = v_0 - g t . \qquad 2\ \text{b}$$

a) Raketa dopadne na zem (h = 0) za čas t_2. a teda

$$0 = h_0 + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = \frac{1}{2} v_0 t_1 + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 ,$$

odkiaľ máme maximálnu rýchlosť

$$v_0 = g \frac{t_2^2}{t_1 + 2t_2} .$$ Pre dané hodnoty $v_0 \approx 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (2) 2 b

Zrýchlenie počas stúpania

$$a = \frac{v_0}{t_1} = g \frac{t_2^2}{t_1 \left(t_1 + 2t_2\right)} .$$ Pre dané hodnoty $a_1 \approx 6{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. 2 b

b) V okamihu vypnutia motora má raketa výšku h_0 a rýchlosť v_0. V maximálnej výške je rýchlosť nulová. Zo zákona zachovania mechanickej energie máme

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0 = m g h_m .$$

Po dosadení z (1) a (2) dostávame

$$h_m = \frac{1}{2} g \left(t_2 \frac{t_1 + t_2}{t_1 + 2t_2} \right)^2 .$$ Pre dané hodnoty $h_m \approx 120$ m. 3 b

3. Zrážka guľôčok

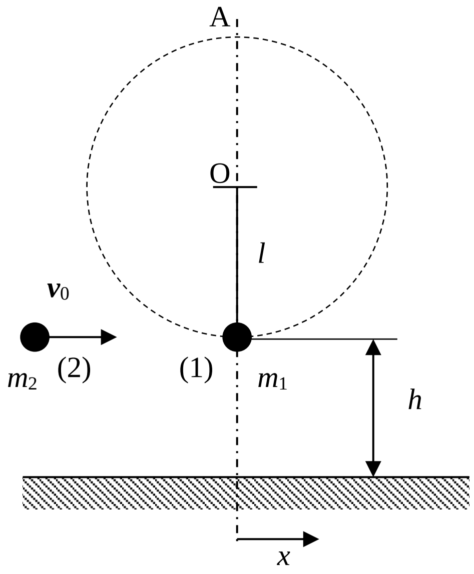
Riešenie:

a) Pre pohyb guľôčky (1) po kružnici platí zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{A}}^2 + m_1 g\, 2l$$

Aby sa pohybovala guľôčka po kružnici na napnutom vlákne, musí byť odstredivá sila väčšia alebo rovná dostredivej sile. Kritický prípad je v hornej polohe (bod A), v ktorej rýchlosť guľôčky je minimálna a dostredivá (gravitačná) maximálna. Podmienka pre minimálnu rýchlosť $v_{1\mathrm{A}} = v_{1\mathrm{m}}$ je

$$m_1 \frac{v_{1\mathrm{m}}^2}{l} = m_1 g\,.$$



Obr. D–1

Z rovníc (1) a (2) dostávame

$$v_1 = \sqrt{5 g l}\,.$$

Pri pružnej zrážke sa zachováva hybnosť a kinetická energia dvojice guľôčok. Označíme v_1 a v_2 rýchlosti guľôčok tesne po zrážke.

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{1}{2} m_2 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{a} \quad m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2\,.$$

Z týchto vzťahov dostávame

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_0 \quad \text{a} \quad v_1 = \frac{2 m_2}{m_2 + m_1} v_0\,. \qquad (4)$$

Po dosadení z (3) máme

$$v_{01} = \frac{m_2 + m_1}{2 m_2} \sqrt{5 g l}\,. \qquad 3\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $v_{01} \approx 2{,}35$ m/s.

b) Vlákno je najviac namáhané v najnižšom bode, v ktorom je odstredivá sila maximálna a má smer sily gravitačnej. Maximálna rýchlosť v_1 zodpovedá sile F_p

$$m_1 \frac{v_1^2}{l} + m_1 g = F_\mathrm{p}\,, \text{ odkiaľ máme } v_1 = \sqrt{\frac{F_\mathrm{p} - m_1 g}{m_1} l}\,. \qquad (5)$$

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 3{,}17$ m/s.

Tomu zodpovedá rýchlosť guľôčky (2)

$$v_{02} = \frac{m_2 + m_1}{2 m_2} v_1 = \frac{m_2 + m_1}{2 m_2} \sqrt{\frac{F_\mathrm{p} - m_1 g}{m_1} l}\,.$$ Pre dané hodnoty $v_{02} \approx 2{,}38$ m/s. 3 b

c) Po náraze guľôčky (2) rýchlosťou v_{02} do guľôčky (1) je tesne po odraze rýchlosť guľôčok daná vzťahmi (5) a

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_{02} = \frac{m_2 - m_1}{2 m_2} \sqrt{\frac{F_\mathrm{p} - m_1 g}{m_1} l}\,. \qquad (6)$$

Pred dané hodnoty $v_2 \approx 0{,}72$.

Obe guľôčky sa po zrážke pohybujú v rovnakom smere. Ide o vodorovný vrh.

V zvislom smere sa guľôčky pohybujú rovnaký čas

$t_1 = t_2 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Pre dané hodnoty $t_1 = t_2 \approx 0{,}16$ s. 2 b

Za tento čas sa guľôčky posunú vo vodorovnom smere x

$$x_1 = v_1 t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{F_\mathrm{p} - m_1 g}{m_1} l} \quad \text{a} \quad x_2 = v_2 t_2 = \frac{m_2 - m_1}{2m_2}\sqrt{\frac{2h}{g}\frac{F_\mathrm{p} - m_1 g}{m_1} l} .$$

Pre dané hodnoty $x_1 \approx 0{,}50$ m, $x_2 \approx 0{,}13$ m. 1 b + 1 b

4. Objemová hmotnosť piesku – experimentálna úloha

Riešenie:

Existuje viacero postupov, uvedieme jeden z nich.

Piesok treba najprv dôkladne vysušiť.

a) Keďže suchý piesok je sypký, použijeme väčší odmerný valec. Zvážime prázdny valec a potom doň nasypeme piesok približne 1 cm pod hornú rysku. Z rozdiel váh prázdneho a plného valca je hmotnosť m_1 suchého piesku. Zo stupnice valca určíme objem V_1 piesku. Objemová hmotnosť $\rho_1 = m_1/V_1$.

b) Do valca nalejeme približne do poloviny jeho objemu vodu. Určíme objem vody V_{20} a hmotnosť valca s vodou. Potom pomaly sypeme suchý piesok do vody tak, aby na piesku nezostávali bublinky vzduchu. piesok sypeme až hladina vody vo valci dosiahne hornú rysku. Potom valec odvážime a určíme hmotnosť m_2 pridaného piesku. Z rozdielu konečného a začiatočného objemu určíme objem V_2 zrniek piesku (bez vzduchu). Hustota zrniek piesku $\rho_2 = m_2/V_2$.

c) Objemovú hmotnosť ρ_3 mokrého piesku môžeme určiť rovnako ako u suchého piesku pomocou váh a odmerného valca.

d) Hmotnosť vzorky $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_{10}$, kde V_{10} je objem zrniek vo vzorke (hustotu vzduchu neuvažujeme).

Pomer objemu zrniek a objemu suchého piesku $V_{10}/V_1 = \rho_1/\rho_2$. Pomer objemu vzduchu v objeme suchej vzorky

$$p_1 = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} .$$

Zrnká sú v suchom i mokrom piesku usporiadané tesne tak, že sa navzájom dotýkajú. Po odkvapkaní prebytočnej vody má mokrý piesok rovnaký objem ako po vysušení suchý piesok.

Hmotnosť mokrého piesku $m_3 = \rho_3 V_3 = m_1' + m_\mathrm{v} = \rho_1 V_3 + \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{v}$, kde m_1' je hmotnosť suchého piesku po vysušení mokrého piesku, V_v objem vody v mokrom piesku a ρ_0 hustota vody. Odtiaľ máme

$$p_2 = \frac{V_\mathrm{v}}{V_3} = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_\mathrm{v}} .$$

e) Pomer p_1 je pre vzorky s rôznou zrnitosťou približne rovnaký. Ak by bol tvar zrniek napr. guľový, bol by pomer p_1 nezávislý od polomeru gúľ, ak by bol podstatne menší ako rozmer nádoby (odmerného valca).

Po namočení vytvára voda na povrchu tenkú vrstvu, ktorej hrúbka sa prakticky nemení s veľkosťou zrniek. Objem vody viazanej na povrchu zrniek je teda priamoúmerný obsahu povrchu vzoriek. Pre jednoduchosť považujme zrnka piesku za rovnaké guľôčky. Zatiaľ čo objem zrniek je priamoúmerný tretej mocnine ich polomeru, povrch je priamoúmerný druhej mocnine polomeru ($V = (4/3)\,\pi\, r^3$, $S = 4\pi\, r^2$). Pomer objemu vody a objemu vzoriek so zväčšovaním rozmeru zrniek klesá. Preto p_2 klesá so zväčšovaním rozmeru zrniek.

5. Valec vo vode

Riešenie:

a) Objem medi $V_\mathrm{m} = \dfrac{m_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{m}}$, objem dreva $V_\mathrm{d} = V_\mathrm{v} - V_\mathrm{m} = \dfrac{\pi d^2}{4} h - \dfrac{m_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{m}}$, kde V_v je objem valca.

Hmotnosť valca so záťažou

$$m_\mathrm{v} = m_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{d} V_\mathrm{d} = m_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{d} \left(\frac{\pi d^2}{4} h - \frac{m_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{m}} \right). \qquad (1) \qquad 2\ \mathrm{b}$$

b) Valec so záťažou bude na hladine voľne plávať, ak jeho tiažová sila bude menšia ako vztlaková sila vody, tzn. ak je jeho hmotnosť m_v bude menšia ako hmotnosť vody s objemom valca

$m_\mathrm{v} < \dfrac{\pi d^2}{4} h \rho_\mathrm{v}$. Po dosadení z (1) máme

$$m_\mathrm{m} < \frac{\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{d}}{\rho_\mathrm{m} - \rho_\mathrm{d}} \rho_\mathrm{m} \frac{\pi d^2}{4} h = m_\mathrm{max}.$$

Pre dané hodnoty $m_\mathrm{max} \approx 73{,}7$ g. 3 b

c) Ak je $m_\mathrm{m} \geq m_\mathrm{max}$, je valec ponorený celým objemom pod hladinou. Objem vytlačenej vody je rovný objemu valca

$$\frac{\pi D^2}{4} \Delta H = \frac{\pi d^2}{4} h, \text{ a teda } \Delta H = \frac{d^2}{D^2} h. \qquad (2) \qquad 1\ \mathrm{b}$$

Ak je $m_\mathrm{m} < m_\mathrm{max}$, valec na hladine pláva a pod hladinou sa nachádza časť s objemom

$$V_\mathrm{p} = \frac{m_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{v}}.$$

Pre zvýšenie hladiny vody v nádobe máme

$$\frac{\pi D^2}{4} \Delta H = V_\mathrm{p},$$

a teda $$\Delta H = \frac{4}{\pi D^2} \frac{m_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{v}} = \frac{4 m_\mathrm{m}}{\pi D^2 \rho_\mathrm{v}} \left(1 - \frac{\rho_\mathrm{d}}{\rho_\mathrm{m}} \right) + \frac{d^2}{D^2} \frac{\rho_\mathrm{d}}{\rho_\mathrm{v}} h. \qquad (3) \qquad 2\ \mathrm{b}$$

d) Keďže $m_\mathrm{m1} < m_\mathrm{max}$, podľa (3) dostávame $\Delta H_1 \approx 26$ mm. 1 b

V druhom prípade $m_\mathrm{m2} > m_\mathrm{max}$, celý valec je ponorený na dne nádoby. Podľa (2) máme $\Delta H_2 \approx 29$ mm. 1 b

6. Závažia na kladke

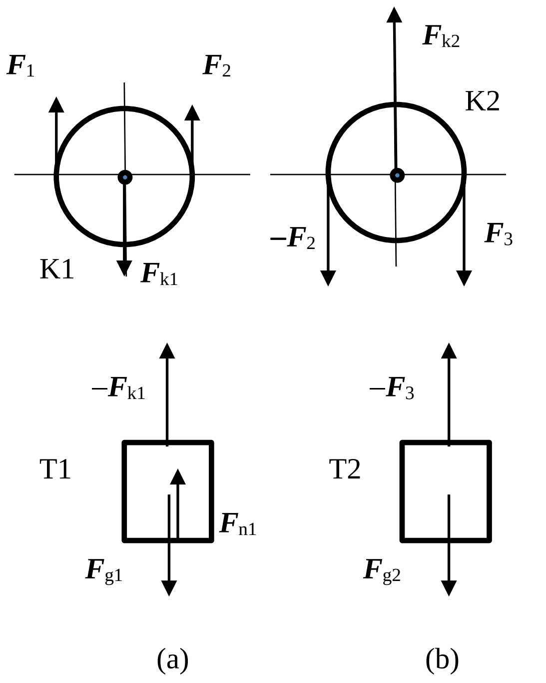
Riešenie:

a) Na kladku K1 pôsobia sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ ťahu úsekov (1) a (2) vlákna a tiažová sila $\boldsymbol{F}_{g1}$ zaveseného telesa T1. Keďže hmotnosť a moment zotrvačnosti kladky sú zanedbateľne malé, sú veľkosti F_1 a F_2 síl rovnaké a veľkosť $F_{k1} = F_1 + F_2 = 2\,F_1$.

Na teleso T1 pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_{g1}$, sila ťahu závesu $-\boldsymbol{F}_{k1}$ a sila $\boldsymbol{F}_{n1}$ tlaku podložky, ak sa teleso T1 nezačne pohybovať, obr. RD–1 (a).

Na kladku K2 pôsobia sily $-\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ ťahu úsekov (2) a (3) vlákna a sila $\boldsymbol{F}_{k2}$ závesu v osi kladky. Keďže hmotnosť a moment zotrvačnosti kladky sú zanedbateľne malé platí $F_2 = F_3$ a $F_{k2} = F_2 + F_3 = 2\,F_3$. Na teleso T2 pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_{g2}$ telesa T2 a sila $-\boldsymbol{F}_3$ ťahu vlákna, obr. RD–1 (b).

obrázok 2 b, vysvetlenie 1 b



Obr. RD–1

b) V statickom prípade musí platiť $F_2 \le M\,g\,/\,2$, pričom $F_2 = F_3 = m\,g$.

Odtiaľ máme $m \le M\,/\,2 = m_1$. Pre dané hodnoty $m_1 = 0{,}50$ kg. 1 b

Pre $m \le m_1$ je $F_3 = m\,g$, $F_{k2} = 2\,m\,g$ a $F_{k2} = 2\,m\,g$. 1 b

Pre dané hodnoty $F_{k1} = F_{k2} \approx 20$ N. 1 b

c) Pre $m \le m_1$ sa teleso T2 nepohybuje, a teda zostáva v začiatočnej polohe.

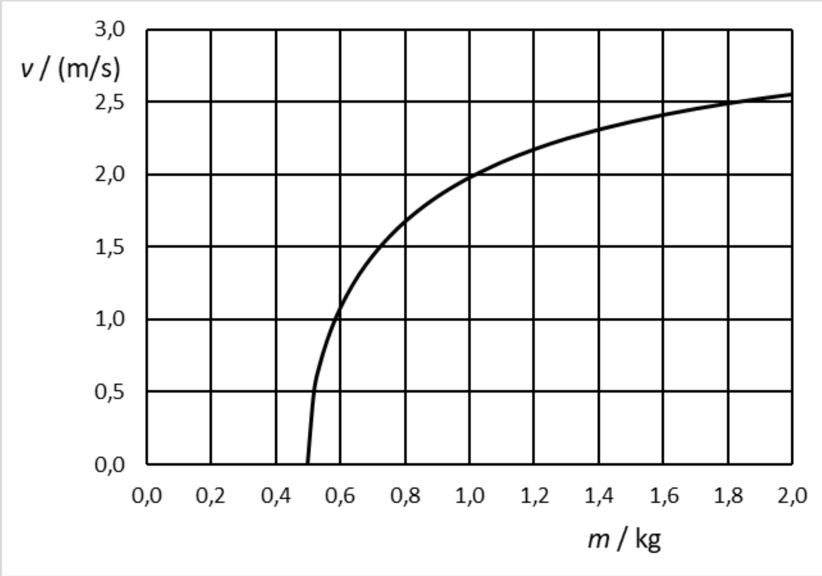
Pre $m > m_1$, po uvoľnení sústavy, začne teleso T2 klesať a teleso T1 stúpať. Keďže neuvažujeme trenie, zachováva sa v sústave mechanická energia. Pri poklese telesa T2 o h získa toto teleso rýchlosť v a teleso T1 na voľnej kladke rýchlosť $v\,/\,2$. Teleso T1 stúpne do výšky $h\,/\,2$. Platí

$$m\,g\,h - M\,g\,\frac{h}{2} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{v}{2}\right)^2 .$$

Odtiaľ dostaneme rýchlosť dopadu telesa T2 na podložku

$$v = 2\sqrt{h\,g\,\frac{2m - M}{4m + M}} .$$ 1 b

Graf 1 Funkcia $f_1(m)$ 1 b



d) Pre $m > m_1$ teleso T2 sa začne pohybovať rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením a smerom nadol a teleso T1 so zrýchlením a / 2 nahor. Pohybové rovnice telies T1 a T2 sú

$$2F_2 - M\,g = M\,\frac{a}{2} \qquad \text{a} \qquad m\,g - F_2 = m\,a\,.$$

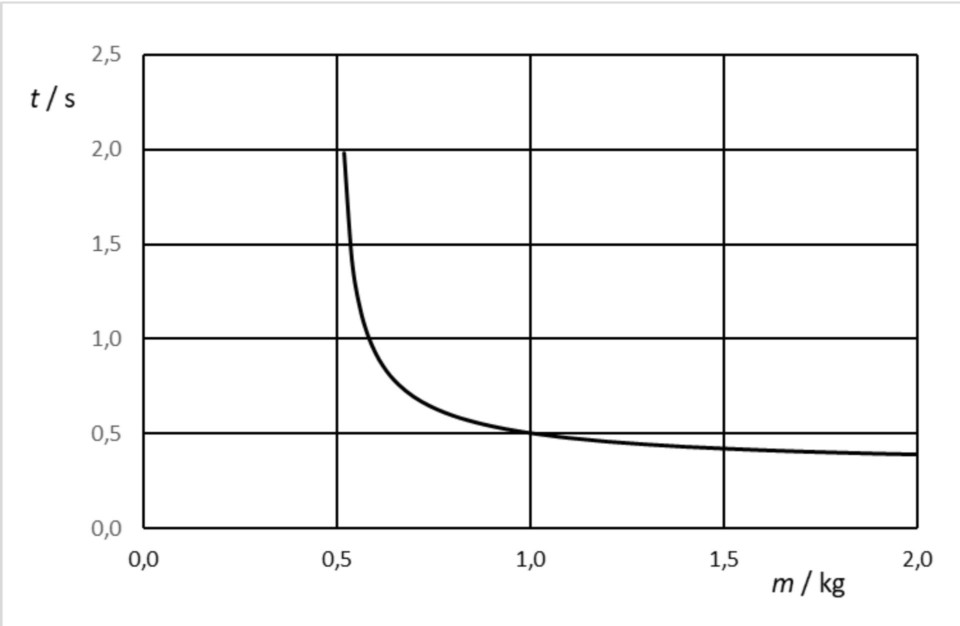
Po vylúčení sily F_2 dostávame po úprave zrýchlenie

$$a = 2\,g\,\frac{2m - M}{4m + M}\,.$$

Doba klesania telesa T2 na podložku

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\sqrt{h\,g}}{g}\sqrt{\frac{4m + M}{2m - M}}\,.$$ 1 b

Graf 2 Funkcia $f_2(m)$ 1 b



7. Planéty

Riešenie:

a) Polosi a doby obehu súvisia prostredníctvom 3. Keplerovho zákona

$$\left(\frac{T_Z}{T_M}\right)^2 = \left(\frac{a_Z}{a_M}\right)^3, \text{ odkiaľ } a_M = a_Z \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^{2/3}.$$

Pre dané hodnoty $a_M \approx 227{,}94$ mil. km. 1 b

Afélium, tzn. najväčšia vzdialenosť od Slnka, $r_{aZ} = a_Z\,(1 + e_Z)$, perihélium je najmenšia vzdialenosť od Slnka $r_{pM} = a_M\,(1 - e_M)$.

Pre dané hodnoty $r_{aZ} \approx 152{,}10$ mil. km, $r_{pM} \approx 206{,}61$ mil. km. 2 b

Najmenšia vzdialenosť $r_{min} \approx 54{,}51$ mil. km. 1 b

b) Uhlová veľkosť

$\varphi = d_M / r_{min} \approx 1{,}248\times10^{-4}$ rad $\approx 25{,}7''$ (uhlových sekúnd) 1 b

Pozn.: v júli 2018 bola pozorovaná uhlová veľkosť 24,3″, v roku 2003 veľkosť 25,1″.

c) Uhlová rýchlosť sprievodiča Zeme $\omega_Z = 2\pi / T_Z$ a Marsu $\omega_M = 2\pi / T_M$. Relatívny pohyb planét okolo Slnka má rozdielovú uhlovú rýchlosť $\Delta\omega = \omega_Z - \omega_M$. Planéty sú v opozícii po uplynutí času T_o, pre ktorý platí $\Delta\omega\, T_o = 2\pi$. Po dosadení máme

$$T_o = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_Z - \omega_M} = \frac{T_Z T_M}{T_M - T_Z}.$$ Pre dané hodnoty $T_o \approx 779{,}9$ d $\approx 2{,}14$ r. 2 b

Za tento čas sa sprievodič opozície natočí o uhol $\Delta\varphi = T_o\,\omega_Z \approx 13{,}42$ rad $= 4\pi + 0{,}85$ rad.

Perióda „veľkej opozície“

$T_{vo} = 2\pi\, T_0 / (\Delta\varphi - 4\pi) \approx 15{,}8$ r.

Perióda „veľkej opozície“ je približne 16 rokov. 2 b

Doba opakovania „veľkej opozície“ mierne kolíše okolo tejto hodnoty. Keďže po roku 2003 nastala o 15 rokov (v roku 2018), ďalšiu možno očakávať v roku 2003 + 2 × 16 = 2015. 1 b

To je hodnota, ktorú očakávajú astronómovia.

Pozri napr. http://www.szaa.org/index.php/9-uncategorised/340-velka-opozicia-marsu-2018.

61. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (1, 3, 5), Kamil Bystrický (2), Ivo Čáp (4, 6, 7)
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020