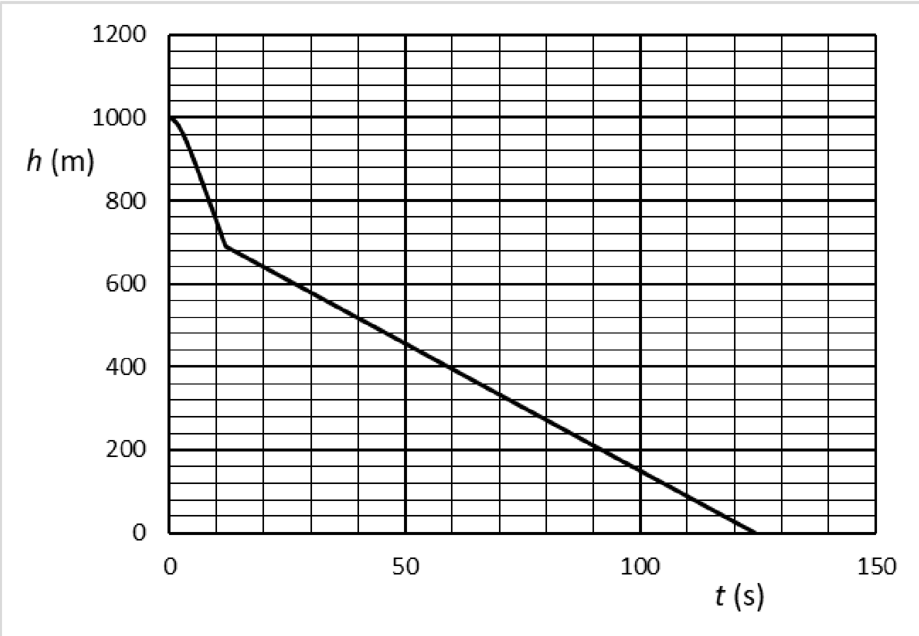
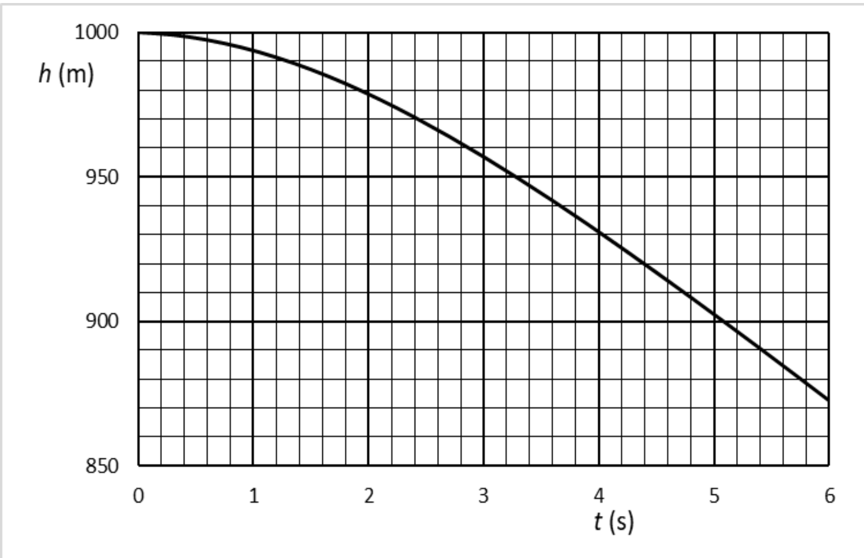
61. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2019/2020
kategória C – domáce kolo
Texty úloh

1. Parašutista

Pád parašutistu je typický príklad nerovnomerne zrýchleného pohybu. Na cvičný zoskok si parašutista zobral mobil s aplikáciou „výškomer" s časovým záznamom výšky. Hmotnosť parašutistu i s výstrojom m = 100 kg. Záznam dal potom doma svojmu synovi Jankovi na rozmýšľanie.
Janko si zo záznamu zostrojil graf výšky h parašutistu nad povrchom zeme ako funkciu času t obr. C–1. Potom zistil, že zaujímavá je prvá fáza zoskoku, preto zostrojil podrobnejší graf funkcie h = f(t) za prvých 6 s pádu parašutistu, obr. C–2.



Obr. C–1



Obr. C–2

a) Z grafu na obr. C–1 odhadnite čas t_1, kedy sa parašutistovi otvoril padák a v akej výške h_1 nad povrchom zeme. Uveďte, o aký typ pohybu išlo pred otvorením padáka a po ňom.

b) Pomocou grafu na obr. C–2 zostrojte graf rýchlosti v pádu parašutistu ako funkciu času t za čas prvých 6 s.

c) Predpokladajte, že počas pohybu na parašutistu pôsobí okrem tiažovej sily aj odporová sila $F_0 = -k v^2$. Zostrojte graf sily, ktorá pôsobí na parašutistu počas prvej fázy pádu, obr. C–2, ako funkciu premennej $x = v^2$, pre ktorú je graf sily lineárny. Z grafu určte koeficient odporu k_1 počas pádu bez otvoreného padáka a maximálnu rýchlosť v_1, ktorú by dosiahol, keby sa mu padák neotvoril.

d) Z grafu na obr. C–1 určte rýchlosť v_2 pádu s otvoreným padákom a koeficient odporu k_2 počas tejto fázy pádu. Určte preťaženie $p = F/F_g$ parašutistu, ak po otvorení padáka sa rýchlosť pádu ustáli za dobu $\Delta t \approx 1{,}0$ s.

Uvažujte $g = 9{,}8$ m/s^2. Pri konštrukcii grafov podľa častí b) a c) stačí určiť body zodpovedajúce celým sekundám pohybu. Na presné zostrojenie dotyčnice ku krivke odporúčame použiť zrkadlovú metódu: keď postavíte zrkadielko na krivku v bode dotyku a krivka a jej zrkadlový obraz tvoria hladkú krivku (bez zlomu), je povrch zrkadla kolmý na dotyčnicu.

2. Rozšírenie tepny

Choroba, ktorá vážne ohrozuje človeka, je rozšírenie (aneuryzma) tepien. Najčastejšie sa prejavuje v brušnej časti aorty (aorta abdominalis), obr. C–3. V normálnom stave je jej vnútorný priemer okolo 2 cm, ale v dôsledku oslabenia steny sa môže rozšíriť až na trojnásobok. Ak cieva praskne, dôjde k silnému vnútornému krvácaniu a tým k vážnemu ohrozeniu života.

Obr. C–3

Uvažujme nasledujúci zjednodušený model. Máme pružnú tepnu s vnútorným priemerom $d_1 = 20$ mm a hrúbkou steny $h_1 = 1{,}6$ mm. Tepnou prechádza krv s priemerným objemovým prietokom $Q_{V0} = 2{,}5$ l/min, pričom v krátkom okamihu systoly (stlačenia srdca) dosahuje prietok až 10–násobok hodnoty Q_{V0}. V okamihu systoly je tlak krvi v tepne $p_1 = 120$ mmHg (rozdiel tlaku na vnútornú a vonkajšiu stenu cievy). Predpokladajte, že rýchlosť prúdenia krvi je v danom okamihu v celom priereze tepny rovnaká.

a) Určte v okamihu systoly rýchlosť v_1 prúdenia krvi v tepne a mechanické napätie σ_1 v stene tepny. Vyjadrite tlak p_1 v jednotkách sústavy SI.

V dôsledku poklesu tuhosti steny tepny dôjde k jej rozšíreniu na vnútorný priemer $d_2 = 42$ mm. Predpokladajte, že dĺžková hmotnosť ani hustota trubice sa nezmení.

b) Určte hrúbku h_2 steny tepny po jej rozšírení.

c) Určte rýchlosť v_2 prúdenia krvi, tlak krvi p_2 v rozšírenej časti trubice a mechanické napätie σ_2 v stene rozšírenej tepny v okamihu systoly. Posúďte, či je zvýšenie napätia v stene tepny významné.

Trubicu považujte za tenkú, tzn. $h << d$. Hustota krvi $\rho \approx 1{,}06\times10^3$ kg/m^3.

3. Balón

Atraktívnym zážitkom v ostatných rokoch je let teplovzdušným balónom. Uvažujte balón s konštrukčnou hmotnosťou (látka balóna, horáky, kôš a záťaž) m_0 = 120 kg, ktorý má vyniesť posádku s hmotnosťou m_p = 160 kg. V dolnej časti má balón otvor, ktorým sa do vnútra balóna vháňa teplý vzduch a ktorý zabezpečuje rovnaký tlak vzduchu vo vnútri balóna a v jeho okolí. Predpokladajte, že vonkajšia teplota vzduchu t_0 = 20 °C sa s výškou balóna nad zemou nemení. Vo vnútri balóna sa pomocou horákov udržiava stála teplota vzduchu t_v = 80 °C. Na zemi sa balón pripútaný k povrchu zeme naplní pomocou horákov teplým vzduchom až sa celý objem vyplní. Predpokladajte, že objem V balóna sa pri zmene výšky h nemení.

a) Na povrchu zeme je tlak vzduchu p_{a0} = 101 kPa. Určte tlak p_a vzduchu ako funkciu výšky h nad zemou, ak predpokladáme, že v uvažovanom rozsahu výšky sa hustota vzduchu mení iba málo a vo výpočte zmeny tlaku vzduchu ju možno považovať za rovnú hustote ρ_{a0} vzduchu na povrchu zeme.

b) V skutočnosti sa hustota ρ vzduchu mení so zmenou tlaku p_a. Určte relatívnu zmenu hustoty vzduchu $\eta = \Delta\rho_0 / \rho_0$ pri výstupe z povrchu zeme do výšky h_1 = 400 m, ak uvažujete vzťah pre tlak p_a určený v časti a).

V ďalšej časti úlohy uvažujte zmenu tlaku p_a i hustoty ρ vzduchu s výškou h.

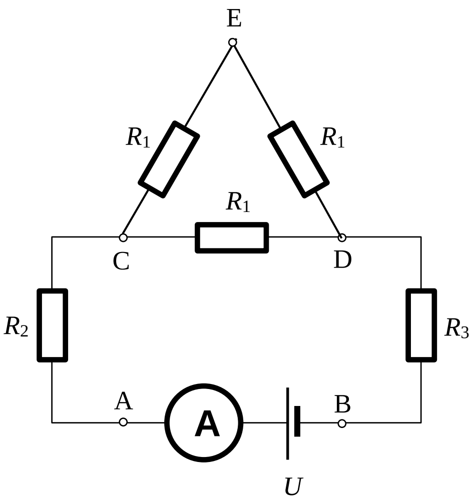
c) Určte objem V balónu, aby sa balón s posádkou vzniesol do výšky h_2 = 200 m. Aký priemer d má balón v tomto prípade, ak má približne tvar gule.

d) O akú výšku Δh vystúpi balón s objemom V podľa časti c), ak posádka vyhodí záťaž s hmotnosťou m_z = 20 kg?

Molárna hmotnosť vzduchu $M_m = 29\times10^{-3}$ kg·mol^{-1}, plynová konštanta R = 8,3 J·K^{-1}·mol^{-1}, g = 9,8 m·s^{-2}.

4. Spojenie rezistorov

Tri rezistory s odpormi R_1 = 15 Ω sú zapojené do trojuholníka CDE. Uzly C, D sú pripojené rezistormi R_2 = 30 Ω, R_3 = 45 Ω k zdroju s napätím U = 9,0 V, obr. C–4. Ampérmetrom **A** meriame elektrický prúd, ktorý prechádza zdrojom. Použitím spojovacích vodičov môžeme meniť elektrický odpor vonkajšieho obvodu pripojeného ku svorkám A, B zdroja s ampérmetrom.



Obr. C–4

Vo všetkých nasledujúcich prípadoch a) až d) úlohy určte elektrický odpor R obvodu vzhľadom na svorky A, B, elektrický prúd I prechádzajúci zdrojom, elektrický výkon P zdroja a elektrický príkon P_T elektrického trojuholníka CDE. V prípadoch b) až d) nakreslite schému upraveného obvodu.

a) Elektrický obvod je zapojený podľa schémy na obr. C–4.

b) V elektrickom obvode podľa obr. C–4 spojíme vodivo svorky A, C (spojenie nakrátko, skrat).

c) V elektrickom obvode podľa obr. C–4 spojíme vodivo svorky A, E (spojenie nakrátko, skrat).

d) V elektrickom obvode podľa obr. C–4 spojíme vodivo dvojice svoriek A, E a B, D (spojenie nakrátko, skrat).

Vnútorný odpor zdroja a vnútorný odpor ampérmetra sú veľmi malé voči odporu rezistorov v obvode.

5. Fast Heater

V televíznej reklame sa propaguje výrobok Fast Heater (rýchloohrievač), o ktorom sa tvrdí, že v krátkej dobe vyhreje miestnosť. Slúži najmä na rýchle zohriatie vzduchu v jednej miestnosti bez potreby vyhrievať celý byt. Prístroj je prenosný a zasúva sa priamo do elektrickej zásuvky, obr C–5. Obsahuje keramické ohrievacie teleso, ventilátor, časový spínač a termoregulátor. Výrobca udáva, že pri príkone $P = 350$ W je vhodný pre rýchle zohriatie miestnosti s obsahom podlahy až $S = 20\ \mathrm{m}^2$ a výškou $h = 2{,}5$ m.

Obr. C–5

a) Určte hustotu ρ a hmotnosť m vzduchu v miestnosti pri tlaku $p = 100$ kPa a teplote $t_1 = 18$ °C.

b) Určte molovú tepelnú kapacitu pri konštantnom tlaku C_{pm} a tepelnú kapacitu C_p vzduchu v miestnosti.

c) Určte čas τ, za ktorý sa ohrievačom zohreje vzduch v miestnosti z teploty t_1 na teplotu $t_2 = 23$ °C. Predpokladajte, že ohrievač zohrieva iba vzduch v miestnosti, teplo sa rozloží v miestnosti rovnomerne a nedochádza k tepelným stratám. Posúďte, či je názov Fast Heater (rýchloohrievač) odôvodnený.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty.

Molová hmotnosť vzduchu $M_m = 29 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, molová plynová konštanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$. Vzduch považujte za ideálny plyn dvojatómových molekúl.

6. Prvý krok človeka na Mesiaci

V roku 2019 sa oslávilo 50. výročie vykročenia prvého človeka na Mesiac (21. júla 1969 – Neil Armstrong a Edwin Aldrin). Kozmickú loď Apollo 11 vyniesla na kružnicovú parkovaciu trajektóriu vo výške h = 190 km nad povrch Zeme raketa Saturn V. Tretí stupeň rakety potom uviedol Apollo na trajektóriu k Mesiacu a od Apolla sa odpojil.

a) Určte rýchlosť v_0 rakety na parkovacej trajektórii.

V určitom bode parkovacej trajektórie sa pomocou raketových motorov 3. stupňa rakety zvýšila rýchlosť Apolla na štartovaciu hodnotu v_1. Po navedení na trajektóriu k Mesiacu a oddelení 3. stupňa rakety sa loď Apollo pohybovala v gravitačnom poli voľným pohybom k Mesiacu.
Pre prvú predstavu uvažujme jednoduchý prípad pohybu lode iba v gravitačnom poli Zeme (gravitačné pole Slnka, Mesiaca ani iných telies neuvažujte).

b) Uveďte, v ktorom bode parkovacej trajektórie na priamke prechádzajúcej stredmi Zeme a Mesiaca sa zvýšila rýchlosť rakety z parkovacej v_0 na štartovaciu v_1. Nakreslite obrázok a vyznačte v ňom schematicky parkovaciu trajektóriu okolo Zeme a najvýhodnejšiu eliptickú trajektóriu letu na orbitálnu trajektóriu Mesiaca.

c) Určte hodnotu v_1 štartovacej rýchlosti, aby sa loď dostala voľným pohybom na orbitálnu trajektóriu Mesiaca. Určte rýchlosť v_2, ktorú by mala raketa pri dosiahnutí orbity Mesiaca.

d) Určte čas t letu rakety z parkovacej trajektórie okolo Zeme až po dosiahnutie orbity Mesiaca.

V skutočnosti loď Apollo 11 vstúpila na trajektóriu k Mesiacu 16.7.1969 o 13:32 hod. a k Mesiacu priletela 19.7.1969 o 17:21 hod. Naspäť loď odštartovala z trajektórie Mesiaca 22.7. o 4:55 hod. a na Zem sa vrátila 24.7.1969 o 16:35 hod.

e) Určte vzdialenosť r_0 od Zeme na spojnici Zem–Mesiac, v ktorej je gravitačná sila sústavy Zeme a Mesiaca nulová. Aká by bola optimálna trajektória, ak uvážime aj gravitáciu Mesiaca – nakreslite obrázok.

f) Vysvetlite, prečo je skutočný čas letu zo Zeme k Mesiacu a naspäť kratší ako čas t určený v časti d) a prečo je čas letu od Zeme k Mesiacu dlhší ako čas návratu k Zemi. Uveďte, či je výhodnejšie štartovať od Zeme k Mesiacu, resp. od Mesiaca k Zemi, v čase splnu alebo novu Mesiaca.

Na internete http://kalendar.aktuality.sk/lunarny/rok/1969/ zistite, v akej fáze bol Mesiac v čase štartu Apolla od Zeme a v akej v čase návratu k Zemi.
Hodnoty veličín potrebné pre výpočty vyhľadajte v tabuľkách alebo na internete.

7. Meranie viskozity kvapaliny – experimentálna úloha

Pri pohybe telesa v tekutine (kvapalina alebo plyn) vzniká odpor, ktorý je spôsobený obtekaním telesa tekutinou. Ak je rýchlosť telesa voči tekutine malá, a tvar telesa je jednoduchý (napr. guľa, kvapka), je obtekanie telesa laminárne a ide o viskózny odpor a odporová sila je priamoúmerná relatívnej rýchlosti a viskozite tekutiny. V tejto úlohe budete vyšetrovať viskózny odpor kvapaliny voči pohybu guľôčky (oceľovej, olovenej, sklenenej) pomocou matematického kyvadla. Ku guľôčke s priemerom okolo 1 cm pripevnite vlákno s dĺžkou približne 1 m (napr. sekundovým lepidlom). Horný koniec vlákna upevnite do vhodného držiaka.

a) Zmerajte hmotnosť m a priemer d guľôčky a dĺžku závesu L.

b) Zmerajte čo najpresnejšie dobu kmitu malých kmitov kyvadla a porovnajte ju s hodnotou určenou z dĺžky závesu $l = L + d / 2$.

Ak pod kyvadlo umiestnite nádobu s kvapalinou tak, aby bola guľôčka v kvapaline ponorená, bude proti pohybu kyvadla pôsobiť odporová sila kvapaliny. Predpokladajme, že pri malých výchylkách x z rovnovážnej polohy vo vodorovnom smere bude pohyb guľôčky dostatočne pomalý, aby mal odpor charakter viskózneho odporu.

V takom prípade pôsobí proti pohybu guľôčky odporová sila daná Stokesovým vzťahom $F = -3\pi \eta d v$, kde η je viskozita, d priemer guľôčky a v rýchlosť guľôčky vzhľadom na kvapalinu.

Pohybovú rovnicu guľôčky pre malé výchylky x možno vyjadriť v tvare

$$a + 2bv + \omega_0^2 x = 0 , \qquad (1)$$

kde v je rýchlosť a a zrýchlenie guľôčky.

c) Odvoďte vzťahy pre konštanty b a ω_0 v rovnici (1).

Pre $b < \omega_0$ (slabé tlmenie) má riešenie rovnice tvar

$$x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{-bt} \cos \omega t, \quad \text{kde} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}\ , \text{ tzn. } \ln\left(\frac{x_0}{x}\right) = bt \cos \omega t\ .$$

Pre maximálne výchylky x_n v jednom smere, keď $\cos \omega t = 1$, dostávame $\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) = bt_n$.

d) Zmerajte sériu hodnôt (x_n, t_n), zapíšte ich do tabuľky a zostrojte graf s premennými t_n a $\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right)$.

Z grafu určte hodnotu b a vypočítajte hodnotu viskozity η.

Meranie urobte pre dve rôzne kvapaliny, napr. vodu a olej. Výchylky odčítajte na meradle priloženom nad hladinu za pohybujúci sa záves kyvadla. Odporúčame urobiť videozáznam a potrebné hodnoty veličín určiť zo záznamu deja.

61. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*

Autori návrhov úloh:	Daniel Kluvanec (1), Ivo Čáp (2, 4, 5, 6, 7), Kamil Bystrický (3)
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020