61. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2019/2020
kategória C – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Parašutista

Riešenie:

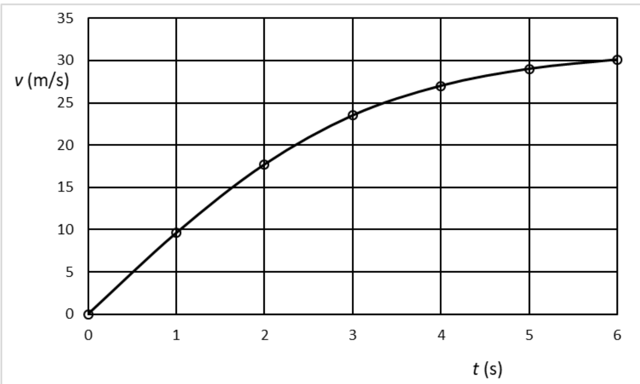
a) Padák sa otvoril približne v čase $t_1 \approx 12$ s pádu vo výške $h_1 \approx 680$ m. Z grafu na obr. C−1 vidíme, že prvá časť pádu je pohyb nerovnomerne zrýchlený, pričom pád postupne prechádza do rovnomerného pohybu. V okamihu otvorenia padáku sa počas veľmi krátkeho času spomalenia veľkou silou odporu vzduchu ustáli rovnomerný pohyb, ktorým sa potom parašutista znáša k zemi.

2 b

b) Okamžitá rýchlosť pádu parašutistu je graficky určená smernicou dotyčnice ku grafu výšky h ako funkcie času t. Výsledky zaznamenáme do tabuľky

t /s	0	1	2	3	4	5	6
v / m/s	0	9,6	17,7	23,5	27,0	29,0	30,1

Pomocou týchto bodov zostrojíme graf rýchlosti prepojením bodov najpravdepodobnejšou trendovou krivkou (body sa nespájajú úsečkami), obr. RC−1.

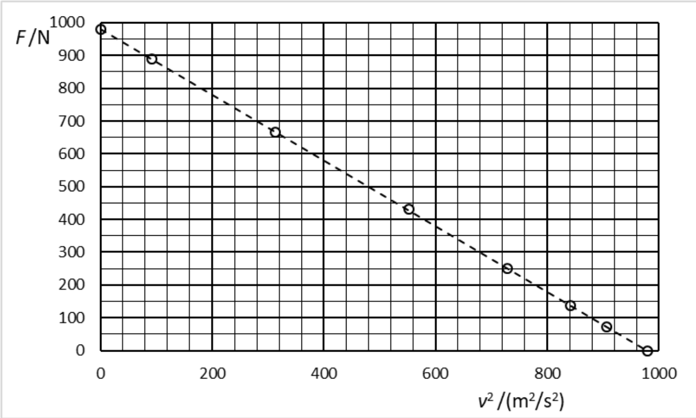


Obr. RC−1 2 b

c) Sila F sa určí ako súčin ma, kde zrýchlenie a sa graficky určí ako smernica dotyčnice grafu rýchlosti v ako funkcie času t. Keďže predpokladáme, že sila F je lineárne závislá od v^2, zapíšeme do 3. riadku tabuľky v^2 pre jednotlivé časy pádu parašutistu. Hodnoty zrýchlenia a určené z obr. RC−1 vynásobené hmotnosťou m parašutistu napíšeme do ďalšieho 4. riadku tabuľky (pre body zodpovedajúce celým sekundám).

t /s	0	1	2	3	4	5	6
v / m/s	0	9,6	17,7	23,5	27,0	29,0	30,1
v^2 /(m^2/s^2)	0	92	313	552	729	841	906
F / N	980	888	667	430	250	136	72

Z týchto bodov zostrojíme graf sily F ako funkcie v^2, obr. RC–2. Zobrazíme jednotlivé body a pomocou nich trendovú priamku. Posledný bod je priesečník s osou v^2, ktorý zodpovedá $F = 0$ N, a teda ustálenému pohybu.



Obr. RC–2 3 b

Graf je lineárny, čo je potvrdením predpokladu o odporovej sile. Z grafu určíme $F_0 \approx 980$ N na začiatku (iba gravitačná sila) a smernicu $k_1 \approx 1{,}0\ \mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$. Z predĺženia trendovej priamky určíme $v_1^2 \approx 980\ \mathrm{m^2/s^2}$, odkiaľ máme ustálenú rýchlosť pádu $v_1 \approx 31{,}3$ m/s. Z prvej tabuľky vidíme, že túto rýchlosť parašutista dosiahol už v čase 6 s pádu.

d) Rýchlosť pádu s otvoreným padákom určíme ako smernicu priamočiarej časti grafu na obr. C–1.

Rýchlosť $v_2 \approx 6{,}1$ m/s.

Tomu zodpovedá koeficient odporu

$k_2 = \dfrac{m\,g}{v_2^2}$. Pre dané a vypočítané hodnoty $k_2 \approx 26\ \mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$. 2 b

Po otvorení padáka rýchlosť parašutistu poklesne z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 za čas Δt. Priemerné preťaženie počas tejto zmeny

$p = \dfrac{v_1 - v_2}{g\,\Delta t}$. Po dosadení $p \approx 2{,}6$ (zrýchlenie $2{,}6\,g$), 1 b

čo je prijateľná hodnoty pre trénovaného parašutistu.

2. Rozšírenie tepny

Riešenie:

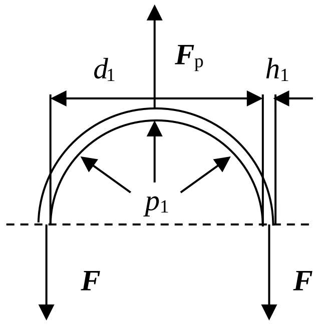
a) Rýchlosť prúdenia krvi $v_1 = \frac{Q_V}{S_1} = \frac{10\,Q_{V0}}{\pi\, d_1^2} \approx 1{,}33$ m/s. 2 b

Pozn.: Udávaná hodnota je 100 – 150 cm/s.

Rozdeľme trubicu pozdĺžnym rezom rovinou prechádzajúcou osou trubice, obr. RC–3. Poltrubice s dĺžkou l sú vzájomne odtláčané tlakovou silou $F = p_1 S_1 = p_1 d_1 l$. Táto sila je v rovnováhe so silou príťažlivosti, ktorá pôsobí v plochách rezu $F = 2\, h_1\, l\, \sigma$.

Z rovnosti týchto síl dostávame

$$\sigma_1 = p_1 \frac{d_1}{2 h_1} .$$



Obr. RC–3

Prevod jednotiek tlaku: 1 mmHg = $h\, \rho_{Hg}\, g$ = $(1{,}00\times10^{-3}$ m$)\times(13\,595\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})\times(9{,}807\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$ = 133,3 Pa.

$$p_1 = (120\ \text{mmHg}) \times \left(133{,}3\ \frac{\text{Pa}}{\text{mmHg}}\right) = 16{,}0\ \text{kPa} .$$

Štandardné mechanické napätie v stene trubice $\sigma_1 \approx 100$ kPa. 2 b

b) Ak sa trubica stenčí a jej priemer sa vnútorným tlakom zväčší, predpokladáme, že objem steny na jednotku dĺžky trubice sa zachová

$\pi\, d_1\, h_1 = \pi\, d_2\, h_2$, odkiaľ $h_2 = \frac{d_1 h_1}{d_2}$. Pre dané hodnoty $h_2 \approx 0{,}76$ mm. 1 b

c) Rýchlosť v rozšírenej časti

$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$. Pre dané hodnoty $v_2 \approx 29{,}5$ cm/s.

Tlak určíme pomocou Bernouliho rovnice

$$\frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + p_2 ,$$

odkiaľ

$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right)$, pre dané hodnoty $p_2 \approx 16{,}1$ kPa. 2 b

Mechanické napätie v stene

$\sigma_2 = p_2 \frac{d_2}{2 h_2}$. Pre dané hodnoty $\sigma_2 \approx 445$ kPa.

V mieste aneuryzmy je stena tepny namáhaná takmer 4,5× väčším napätím ako v štandadnom stave. Ak sa k tomu pridá prípadný zvýšený krvný tlak, hrozí prasknutie tepny a vnútorné krvácanie.

3. Balón

Riešenie:

a) S rastúcou výškou tlak p_a aj hustota ρ vzduchu klesajú. Ak predpokladáme, že hustota sa mení iba málo a možno ju v danom rozsahu výšky považovať za konštantnú ρ_{a0}, tlak sa mení podľa vzťahu

$$p_a - p_{a0} = -\rho_0\, g\, h, \qquad (1)$$

kde ρ_0 je hustota vzduchu na povrchu zeme.
Hustotu vzduchu určíme zo stavovej rovnice

$$pV = nRT = \frac{m}{M_m} RT,\ \text{odkiaľ máme}\ \rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{p_{a0} M_m}{RT_0}. \qquad (2)$$ 2 b

Pre dané hodnoty $\rho_0 \approx 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

b) Pre zmenu hustoty v dôsledku zmeny tlaku pri konštantnej teplote máme

$$\Delta\rho_0 = \frac{p M_m}{RT_0} - \frac{p_0 M_m}{RT_0} = \frac{p_0 M_m}{RT_0}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right) = -\rho_0 \frac{\rho_0 g h_1}{p_0},$$

odkiaľ dostávame

$$\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} = -\frac{\rho_0 g h_1}{p_0}.$$ Pre dané hodnoty $\Delta\rho_0/\rho_0 \approx -0{,}047 = -4{,}7\ \%$. (3) 2 b

c) Pri vznášaní balónu je v rovnováhe tiažová sila a vztlaková sila

$$(m_0 + m_p + m_{v2})\, g = \rho_2 V g,$$

kde hmotnosť vzduchu v balóne $m_{v2} = \rho_{v2} V$, pričom hustota vzduchu v balóne

$$\rho_{v2} = \frac{p_{a2} M_m}{RT_v} = p_{a0}\left(1 - \frac{M_m g h_2}{RT_0}\right)\frac{M_m}{RT_v} \quad \text{a} \quad \rho_2 = p_{a0}\left(1 - \frac{M_m g h_2}{RT_0}\right)\frac{M_m}{RT_0}.$$

Pre dané hodnoty $\rho_{v2} \approx 0{,}98\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a $\rho_2 \approx 1{,}18\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. 1 b

Požadovaný objem balóna

$$V = \frac{m_0 + m_p}{\rho_2 - \rho_{v2}}.$$ Pre dané a vypočítané hodnoty $V \approx 1\,400\ \mathrm{m^3}$. 2 b

Priemer guľového balóna

$$d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}},\ d \approx 14\ \mathrm{m}.$$ 1 b

d) Pre rovnováhu vo výške $h_2 + \Delta h$ dostávame

$$(m_0 + m_p - m_z)\, g = \rho_3 V g - m_{v3}\, g,$$

kde ρ_3 a m_{v3} je hustota vzduchu a hmotnosť vzduchu v balóne.
Po dosadení

$$m_0 + m_p - m_z = p_{a0}\left(1 - \frac{M_m g h_3}{RT_0}\right)\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_v}\right)\frac{M_m}{R} V.$$

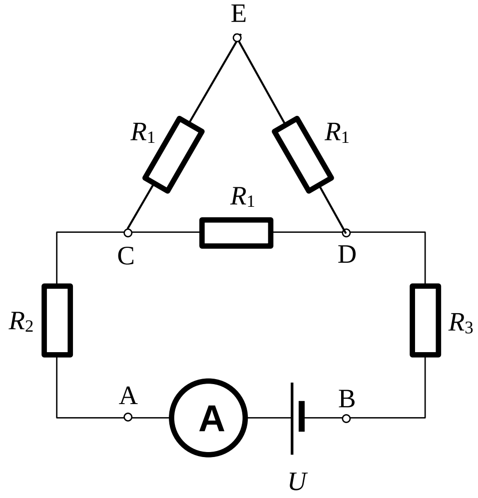
Odtiaľ vyjadríme výšku

$$h_3 = \frac{RT_0}{M_m g}\left(1 - \frac{m_0 + m_p - m_z}{p_{a0} V}\,\frac{R}{M_m}\,\frac{T_0 T_v}{T_v - T_0}\right).$$

Pre dané hodnoty $h_3 \approx 794\ \mathrm{m}$. 2 b

4. Spojenie rezistorov

Tri rezistory s odpormi R_1 = 15 Ω sú zapojené do trojuholníka CDE. Uzly C, D sú pripojené rezistormi R_2 = 30 Ω, R_3 = 45 Ω k zdroju s napätím U = 9,0 V, obr. C–4. Ampérmetrom **A** meriame elektrický prúd, ktorý prechádza zdrojom. Použitím spojovacích vodičov môžeme meniť elektrický odpor vonkajšieho obvodu pripojeného ku svorkám A, B zdroja s ampérmetrom.



Obr. C–4

Vo všetkých nasledujúcich prípadoch a) až d) úlohy určte elektrický odpor R obvodu vzhľadom na svorky A, B, elektrický prúd I prechádzajúci zdrojom, elektrický výkon P zdroja a elektrický príkon P_T elektrického trojuholníka CDE. V prípadoch b) až d) nakreslite schému upraveného obvodu.

a) Elektrický obvod je zapojený podľa schémy na obr. C–4.

b) V elektrickom obvode podľa obr. C–4 spojíme vodivo svorky A, C (spojenie nakrátko, skrat).

c) V elektrickom obvode podľa obr. C–4 spojíme vodivo svorky A, E (spojenie nakrátko, skrat).

d) V elektrickom obvode podľa obr. C–4 spojíme vodivo dvojice svoriek A, E a B, D (spojenie nakrátko, skrat).

Vnútorný odpor zdroja a vnútorný odpor ampérmetra sú veľmi malé voči odporu rezistorov v obvode.

Riešenie

a) Medzi svorkami C a D, obr. C–4, sú paralelne pripojené vetvy s odpormi R_1 a $R_1 + R_1$, tzn. celkový odpor

$$R_{CD} = \frac{R_1(R_1+R_1)}{R_1+R_1+R_1} = \frac{2}{3}R_1$$. Pre dané hodnoty R_{CD} = 10 Ω.

Odpor vzhľadom na svorky A, B

$$R_{AB} = R_{CD} + R_2 + R_3 = \frac{2}{3}R_1 + R_2 + R_3$$. Pre dané hodnoty R_{AB} = 85 Ω. 1 b

Prúd zdroja

$$I_a = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{3U}{2R_1 + 3(R_2+R_3)}$$. Pre dané hodnoty $I_a \approx 0{,}11$ A. 1 b

Výkon zdroja

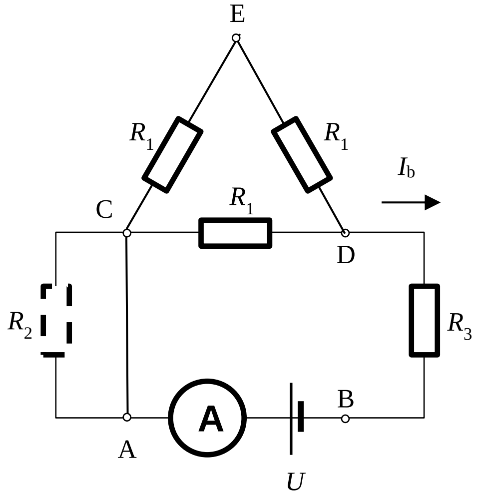
$P_{\mathrm{a}} = U\,I_{\mathrm{a}} = \dfrac{3U^2}{2R_1 + 3(R_2 + R_3)}$. Pre dané hodnoty $P_{\mathrm{a}} \approx 0{,}95$ W. 0,5 b

Príkon elektrického trojuholníka

$$P_{\mathrm{Ta}} = U_{\mathrm{CD}}\,I_{\mathrm{a}} = R_{\mathrm{CD}}\,I_{\mathrm{a}}^2 = U^2\,\frac{6R_1}{\left[2R_1 + 3(R_2 + R_3)\right]^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $P_{\mathrm{Ta}} \approx 0{,}11$ W. 0,5 b

b) Obr. RC–4 0,5 b



Obr. RC–4

V tomto prípade je skratovaný rezistor R_2, tzn. výsledky časti a) upravíme pre $R_2 = 0$.

$R_{\mathrm{AB}} = R_{\mathrm{CD}} + R_3 = \dfrac{2}{3}R_1 + R_3$. Pre dané hodnoty $R_{\mathrm{AB}} = 55\ \Omega$. 0,5 b

Prúd

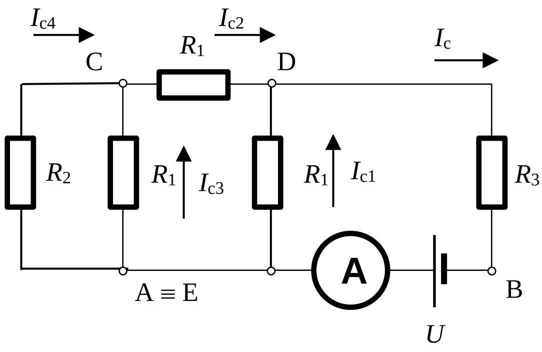
$I_{\mathrm{b}} = \dfrac{U}{R_{\mathrm{AB}}} = \dfrac{3U}{2R_1 + 3R_3}$. Pre dané hodnoty $I_{\mathrm{b}} \approx 0{,}16$ A. 0,5 b

Výkon

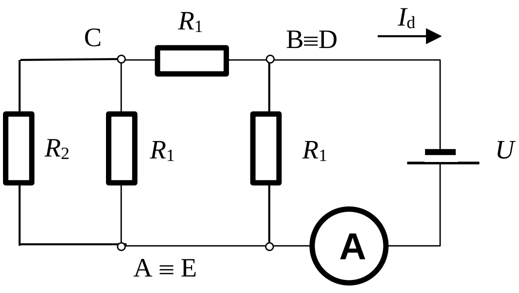
$$P_{\mathrm{b}} = U\,I_{\mathrm{b}} = \frac{3U^2}{2R_1 + 3R_3} \quad \text{a} \quad P_{\mathrm{Tb}} = U^2\,\frac{6R_1}{\left(2R_1 + 3R_3\right)^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $P_{\mathrm{a}} \approx 1{,}5$ W, $P_{\mathrm{Ta}} \approx 0{,}045$ W. 0,5 b

c) Obr. RC-5 2×0,5 b



Obr. RC–5



Obr. RC–6

Ak spojíme svorky A a E, rezistor v strane CE trojuholníka s odporom R_1 je spojený s rezistorom R_2 paralelne. Rezistor v strane DE s odporom R_1 je pripojený medzi svorky D a A. Zapojenie je znázornené na obr. RC–5. Rezistory medzi uzlami C a A sú spojené paralelne, k nim je do série pripojený rezistor vetvy CD a k tejto zostave je paralelne pripojený rezistor vo vetve DA. Výsledný odpor R_{DA} určíme

$$\frac{1}{R_{AD}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \text{, odkiaľ } R_{AD} = R_1 \frac{R_1 + 2R_2}{2R_1 + 3R_2} \text{, } R_{AD} \approx 9{,}4\ \Omega. \qquad (1)$$

$$R_{AB} = R_3 + R_{DA} = R_3 + R_1 \frac{R_1 + 2R_2}{2R_1 + 3R_2}.$$ 0,5 b

Pre dané hodnoty $R_{AB} \approx 54\ \Omega$.

Prúd zdroja

$$I_c = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{U}{R_3 + R_1 \frac{R_1 + 2R_2}{2R_1 + 3R_2}} = U \frac{2R_1 + 3R_2}{R_3 (2R_1 + 3R_2) + R_1 (R_1 + 2R_2)}. \qquad (2)$$

Pre dané hodnoty $I_c \approx 0{,}17$ A. 0,5 b

Elektrický výkon zdroja

$$P_c = U I_c = U^2 \frac{2R_1 + 3R_2}{R_3 (2R_1 + 3R_2) + R_1 (R_1 + 2R_2)} \text{. Pre dané hodnoty } P_c \approx 1{,}5 \text{ W.}$$ 0,5 b

Označíme prúdy I_{c1} až I_{c4} podľa obr. RC–5.

Príkon trojice rezistorov R_1 možno vyjadriť vzťahom

$$P_{Tc} = R_1 \left(I_{c1}^2 + I_{c2}^2 + I_{c3}^2 \right).$$

To vyžaduje určenie všetkých prúdov I_{c1} až I_{c3}.

Druhá možnosť je od príkonu dvojpólu AD odpočítať príkon rezistora R_2

$$P_{Tc} = R_{AD} I_c^2 - R_2 I_{c4}^2. \qquad (3)$$

Stačí určiť prúd I_{c4}.

Prúd I_c sa delí na prúd I_{c1} rezistorom R_1 medzi svorkami D a A a prúd I_{c2} trojicou rezistorov R_1 medzi svorkami D a C a R_1, R_2 medzi svorkami C a A. Prúd I_{c2} sa delí na prúd I_{c3} rezistorom R_1 a I_{c4} rezistorom R_2 medzi svorkami C a A.

$$I_{c2} = I_c \frac{R_1}{R_1 + \left(R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)},$$

$$I_{c4} = I_{c2}\,\frac{R_1}{R_1+R_2} = I_c\,\frac{R_1}{R_1+\left(R_1+\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\right)}\,\frac{R_1}{R_1+R_2} = I_c\,\frac{R_1}{2R_1+3R_2}\,, \tag{4}$$

Pre dané hodnoty $I_{c4} \approx 0{,}021$ A.

Po dosadení (1), (2) a (4) do (3) dostávame;

$$\begin{aligned} P_{Tc} &= \left[R_1\,\frac{R_1+2R_2}{2R_1+3R_2} - R_2\left(\frac{R_1}{2R_1+3R_2}\right)^2\right] I_c^2 = 2R_1\,\frac{R_1^2+3R_1R_2+3R_2^2}{\left(2R_1+3R_2\right)^2}\,I_c^2 = \\ &= 2U^2\,R_1\,\frac{R_1^2+3R_1R_2+3R_2^2}{\left[R_3\left(2R_1+3R_2\right)+R_1\left(R_1+2R_2\right)\right]^2}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Pre dané hodnoty $P_{Tc} \approx 0{,}24$ W. 0,5 b

d) Tento prípad sa líši od predchádzajúceho iba nulovou hodnotou odporu rezistora R_3, obr. RC–6. Ak dosadíme $R_3 = 0$ do vzťahov (1), (2), (4) a (5), máme

$$R_{AB} = R_1\,\frac{R_1+2R_2}{2R_1+3R_2}\,,$$

$$I_d = U\,\frac{2R_1+3R_2}{R_1\left(R_1+2R_2\right)}\,,$$

$$P_d = U^2\,\frac{2R_1+3R_2}{R_1\left(R_1+2R_2\right)}\,,$$

$$P_{Td} = 2U^2\,\frac{R_1^2+3R_1R_2+3R_2^2}{R_1\left(R_1+2R_2\right)^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $R_{AB} \approx 9{,}4\ \Omega$, $I_d \approx 0{,}96$ A, $P_d \approx 8{,}6$ W, $P_{Td} \approx 8{,}2$ W. 2 b

5. Fast Heater

Riešenie:

a) Hustotu určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$\rho = \frac{p\,M_m}{R\,T} = \frac{\left(100\times10^3\ \text{Pa}\right)\left(29\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}\right)}{\left(8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\right)\left(291\,\text{K}\right)} \approx 1{,}20\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$ 1 b

$$m = \rho V = \frac{p\,M_m}{R\,T}\,S\,h \approx 60\ \text{kg}.$$ 1 b

b) Mólová tepelná kapacita ideálneho plynu pri konštantnom tlaku

$$C_{pm} = \left(\frac{s}{2}+1\right)R \approx 29{,}1\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}.$$ 2 b

Tepelná kapacita vzduchu pri konštantnom tlaku v miestnosti (pre dvojatómové molekuly $s = 5$)

$$C_p = \left(\frac{s}{2}+1\right)n\,R = \left(\frac{s}{2}+1\right)\frac{\rho V}{M_m}\,R \approx 60{,}2\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}.$$ 2 b

c) Pri zohrievaní vzduchu sa plyn rozpína, pričom tlak zostáva konštantný. Teplo potrebné na zohriatie vzduchu

$$Q = C_p\,\Delta t = P\,\tau\,,$$

odkiaľ dostávame čas zohrievania

$$\tau = \frac{C_p\,\Delta t}{P} \approx 860\ \text{s} \approx 14\ \text{min.} \qquad 2\ \text{b}$$

V skutočnosti sa zohriatym vzduchom ohrievajú aj steny a vybavenie miestnosti, ale prestup tepla zo vzduchu do pevných látok je pomerne pomalý. Môžeme konštatovať, že názov ohrievača je oprávnený. 2 b

6. Prvý krok človeka na Mesiaci

Riešenie:

a) Na kružnicovej trajektórii v centrálnom gravitačnom poli je v rovnováhe príťažlivá gravitačná sila a zotrvačná odstredivá sila

$$G\frac{M_Z\,m}{\left(R_Z+h\right)^2} = m\,\frac{v_0^2}{R_Z+h}\,,$$

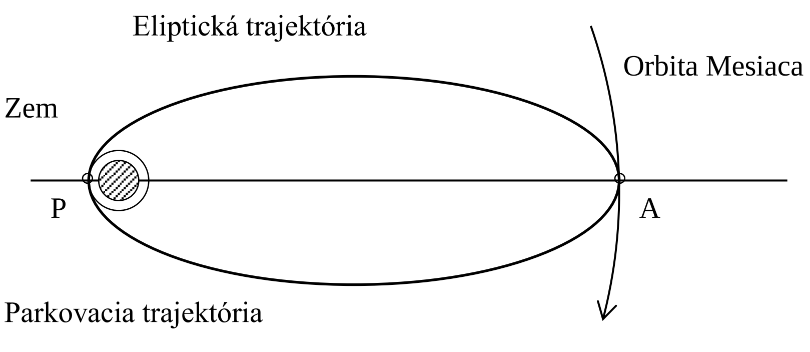
odkiaľ dostávame

$$v_0 = \sqrt{\frac{G\,M_Z}{R_Z+h}}\,.$$

Pre G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}, M_Z = 5,97×10^{24} kg a R_Z = 6,38×10^6 m máme v_0 ≈ 7,79×10^3 m·s^{-1}.

2 b

b) Podľa Keplerovho zákona sa teleso v centrálnom gravitačnom poli pohybuje po kužeľosečke (v tomto prípade elipse), pričom centrálne teleso je v ohnisku kužeľosečky. Optimálna trajektória má blízky bod P elipsy na parkovacej trajektórii okolo Zeme a vzdialený bod A na orbite Mesiaca, obr. RC–7. 2 b



Obr. RC–7

1 b

Miesto štartu (bod P) je na odvrátenej strane voči Mesiacu na spojnici Zem–Mesiac, hlavnej osi elipsy.

c) Pri pohybe telesa v centrálnom gravitačnom poli sa zachováva mechanická energia a moment hybnosti vzhľadom na stred Zeme. Pre body P a A trajektórie máme

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_Z\, m}{R_Z + h} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_Z\, m}{R_{MZ}} \qquad (1)$$

$$\left(R_Z + h\right) m v_1 = R_{MZ}\, m v_2 \,. \qquad (2)$$

Po vylúčení rýchlosti v_2 dostávame

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_Z}{\left(R_Z + h\right)} \frac{R_{MZ}}{R_{MZ} + \left(R_Z + h\right)}}$$

a pomocou (2)

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_{MZ}} \frac{\left(R_Z + h\right)}{R_{MZ} + \left(R_Z + h\right)}} \,.$$

Pre $R_{MZ} = 3{,}84\times10^8$ m máme $v_1 \approx 10{,}9\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 \approx 188\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 1 b

d) Podľa tretieho Keplerovho zákona pre dve telesá obiehajúce spoločné centrálne teleso

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2,$$

kde a_1, a_2 sú dĺžky hlavných polosí eliptických trajektórií a T_1, T_2 doby obehu.
Pre kružnicovú parkovaciu trajektóriu $a_1 = R_Z + h$ a $T_1 = 2\pi\,(R_Z + h) / v_0$. Pre eliptickú trajektóriu $a_2 = \dfrac{R_{MZ} + R_Z + h}{2}$ a doba letu k Mesiacu $t = \dfrac{T_2}{2}$. Doba letu

$$t = \frac{T_1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{GM_Z}}\left[\frac{R_{MZ} + R_Z + h}{2}\right]^{3/2}.$$

Pre dané hodnoty $t \approx 4{,}29\times10^5$ s $\approx$ 4 d 23 h 10 min. 1 b

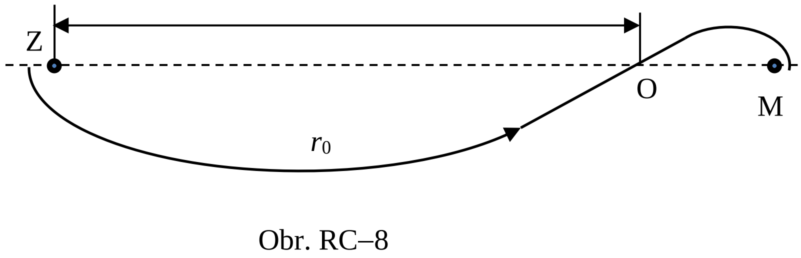
e) Vo vzdialenosti r_0 od stredu Zeme platí

$$\frac{M_Z}{r_0^2} = \frac{M_M}{\left(R_{ZM} - r_0\right)^2},$$ po odmocnení $$\frac{\sqrt{M_Z}}{r_0} = \frac{\sqrt{M_M}}{R_{ZM} - r_0},$$ odkiaľ

$$r_0 = \frac{\sqrt{M_Z}}{\sqrt{M_Z} + \sqrt{M_M}} R_{ZM} \,.$$

Pre hmotnosť Mesiaca $M_M = 7{,}35\times10^{22}$ kg máme $r_0 \approx 0{,}900\, R_{ZM} \approx 3{,}46\times10^8$ m. 1 b

Stačí, ak sa loď dostane do vzdialenosti r_0 (bod O na obr. RC–8), a potom si už Mesiac loď „pritiahne“.



Obr. RC–8

V poslednej fáze letu lode pôsobí dominantne Mesiac. Ako najvýhodnejšia sa javí trajektória prechádzajúca bodom O nulovej gravitácie, obr. RC–8.

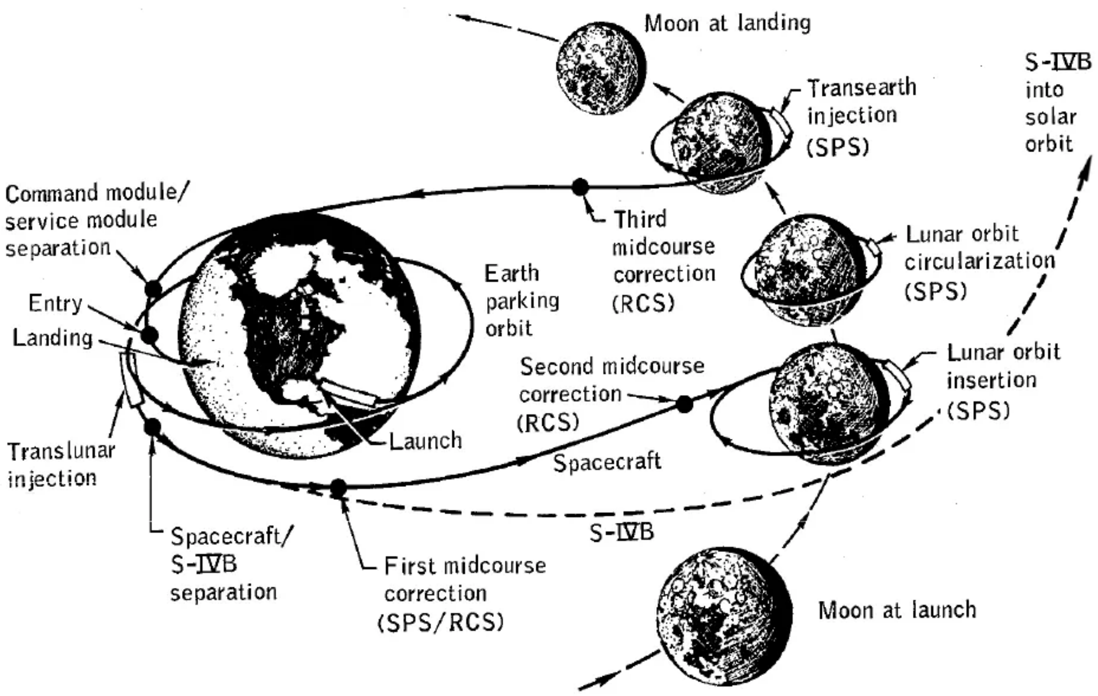
e) Ako vyplýva zo zadania, let k Mesiacu trval približne 3 dni a návrat od Mesiaca približne 2,5 dňa. To je podstatne menej ako výpočtom určená hodnota $t \approx 5$ dní.

Gravitačné pole Mesiaca na ceste kozmickej lode k Mesiacu pohyb lode zrýchli, čo skráti dobu letu. V izolovanej sústave Zem-Mesiac prebieha pohyb lode v oboch smeroch rovnako iba v opačnom poradí. Čas letu tam aj nazad by trval rovnaký čas.

Na kozmickú loď pôsobí aj gravitačné pole Slnka. Ak sú pri ceste k Mesiacu loď a Mesiac medzi Slnkom a Zemou (na Zemi je nov mesiaca), gravitačné pole pôsobí proti smeru gravitačného poľa Zeme a oslabuje ho, čo vyžaduje menšiu štartovaciu rýchlosť, čas letu sa tak mierne predĺži, ale zníži sa požiadavka na palivo. Pri návrate sa gravitačné pole Slnka využije, ak je Zem a loď medzi Slnkom a Mesiacom (na Zemi je spln Mesiaca). Gravitačná sila Slnka pôsobí smerom k Zemi a znižuje nárok na spotrebu paliva. Keďže loď pri návrate štartuje na odvrátenej strane Mesiaca, Gravitačné pole Slnka zosilňuje Pole Mesiaca, čo vyžaduje mierne zvýšenie štartovacej rýchlosti lode, čo sa prejaví počas celého pohybu k Zemi, a čas návratu sa tak mierne skráti. Preto je doba návratu kratšia ako doba letu k Mesiacu. Optimálny je tak štart v čase novu a návrat v čase splnu – to by však vyžadovalo dĺžku misie vyše 14 dní. Keďže misia trvala iba 8 dní, zvolil sa kompromis – štart od Zeme 2 dni po nove (nov bol 14.7.1069) a prílet k Zemi 5 dní pred splnom (spln bol 29.7.1969), pozri stránka http://kalendar.aktuality.sk/lunarny/rok/1969/.

Let je ďalej ovplyvnený aj tým, že sústava spojená so stredom Zeme je neinerciálna a pôsobí v nej zotrvačná (odstredivá) sila v dôsledku pohybu Zeme okolo Slnka. Ďalej sústava Zem–Mesiac rotuje okolo spoločného ťažiska, čo spôsobuje ďalšiu odstredivú silu. Preto sa napr. volí štart od Zeme východným smerom a priblíženie k Zemi od západu. 1 b

Pozn.: Na ukážku je uvedený publikovaný schematický obrázok trajektórie rovnakého letu Apolla 8 (24. decembra 1968), prvého obletu Mesiaca kozmickou loďou s ľudskou posádkou.
(Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Apollo_8)



7. Meranie viskozity kvapaliny – experimentálna úloha

Riešenie:

a) Meranie *m*, *d*, *L*. Určenie hodnôt a chyby merania. 2 b

b) Teoretická hodnota doby kmitu matematického kyvadla $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L + d/2}{g}}$. 2 b

c) Pohybová rovnica malých kmitov kyvadla s viskóznym tlmením

$$m\,a = -3\pi\eta\,d\,v - m\,g\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{g}}\right)\frac{x}{l},$$

kde ρ_k a ρ_g sú hustoty kvapaliny a gule.

Rovnicu upravíme na tvar

$$a + 2\,\frac{3\pi\eta\,d}{2m}v + \frac{g}{l}\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{g}}\right)x = 0\,.$$

Hodnoty konštánt v pohybovej rovnici sú

$$b = \frac{3\pi\eta\,d}{2m},\quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{g}}\right).$$ 2 b

d) Grafom $y = \ln\left(\dfrac{x_0}{x_n}\right)$ ako funkcie *t* je priamka. Smernica priamky je *b*.

Namerané hodnoty vynesieme do grafu a bodmi preložíme regresnú priamku. 2 b

Určíme smernicu tejto priamky a vypočítame viskozitu zo vzťahu

$$\eta = \frac{2m}{3\pi d}b\,.$$ 2 b

61. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*
Autori návrhov úloh: Daniel Kluvanec (1), Ivo Čáp (2, 4, 5, 6, 7), Kamil Bystrický (3)
Recenzia a úprava úloh a riešení: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020