60. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2018/2019
kategória D – krajské kolo

Riešenia úloh

1. Plavba na plti

Riešenie:

a) Plť prešla za čas t_1 dráhu $s = v t_1$. (1)

Rýchlosť člna proti prúdu toku rieky vzhľadom na breh, $v_1 = v_r - v$ a máme

$$s = t_3 (v_r - v). \quad (2) \qquad 1\ b$$

Pri plavbe po prúde toku rieky je rýchlosť člna vzhľadom na breh $v_2 = v_r + v$ a platí

$$s = (v_r + v)(t_2 - t_3). \quad (3) \qquad 1\ b$$

Aby sme určili čas t_3, z rovníc (2) a (3) vylúčime v_r a za rýchlosť v dosadíme z (1)

$$\frac{s}{t_3} + v = v_r, \quad s = \left(\frac{s}{t_3} + v + v\right)(t_2 - t_3) \quad \text{a} \quad t_1 = \left(\frac{t_1}{t_3} + 2\right)(t_2 - t_3).$$

Po úprave dostávame kvadratickú rovnicu pre neznámu t_3

$$t_3^2 + (t_1 - t_2) t_3 - \frac{t_1 t_2}{2} = 0, \qquad 2\ b$$

ktorá má riešenie

$$t_3 = -\frac{t_1 - t_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(t_1 - t_2)^2}{4} + \frac{t_1 t_2}{2}}. \qquad 1\ b$$

Fyzikálny význam má znamienko +, lebo $t_3 > 0$. Po úprave

$$t_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1^2 + t_2^2} - t_1 + t_2\right). \qquad 1\ b$$

Pre dané hodnoty t_3 = 20 min. 1 b

b) Rýchlosť vodného toku $v = \dfrac{s}{t_1}$. Pre dané hodnoty v = 4,0 km/h. 1 b

Rýchlosť člnu vzhľadom na vodu určíme napr. z (2)

$$v_r = s\left(\frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_1}\right). \qquad 1\ b$$

Pre dané a vypočítané hodnoty v_r = 16 km/h. 1 b

2. Zrážka

Riešenie:

a) Ak sa disku A udelí rýchlosť v_0, pohybuje sa po povrchu stola rovnomerne spomaleným pohybom pôsobením sily trenia $F_t = f\, m_A\, g$. Na dráhe $d_1 = d - r_1 - r_2 = 36$ cm je zmena kinetickej energie rovná práci sily trenia

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 - \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 = f\, m_A\, g\, d_1,$$

odkiaľ máme rýchlosť nárazu disku A do disku B

$$v_{A1} = \sqrt{v_0^2 - 2 f g d_1}\,. \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Po odraze má disk A rýchlosť v_{A2}, pričom po prejdení dráhy d_1 späť sa zastaví

$$\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 = f\, m_A\, g\, d_1,$$

odkiaľ rýchlosť po odraze $v_{A2} = \sqrt{2 f g d_1}$. (2) 1 b

Pri dokonale pružnej zrážke sa zachováva hybnosť a kinetická energia sústavy diskov

$$m_A v_{A1} = m_B v_B - m_A v_{A2}\text{, resp. } m_A\left(v_{A1} + v_{A2}\right) = m_B v_B\,, \qquad (3) \qquad 0{,}5\text{ b}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2\text{, resp. } m_A\left(v_{A1}^2 - v_{A2}^2\right) = m_B v_B^2\,. \qquad (4) \qquad 0{,}5\text{ b}$$

Ak delíme (4) rovnicou (3), dostávame

$$v_{A1} - v_{A2} = v_B\,. \qquad (5) \qquad 0{,}5\text{ b}$$

Z rovníc (3) a (5) potom jednoducho dostaneme

$$v_{A2} = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} v_{A1}\,, \qquad (6) \qquad 1\text{ b}$$

$$v_B = \frac{2 m_A}{m_B + m_A} v_{A1}\,. \qquad (7) \qquad 1\text{ b}$$

Do vzťahu (6) dosadíme výsledky (1) a (2)

$$\sqrt{2 f g d_1} = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} \sqrt{v_0^2 - 2 f g d_1}\,,$$

a určíme rýchlosť $v_0 = \sqrt{4 f g d_1}\ \dfrac{\sqrt{m_B^2 + m_A^2}}{m_B - m_A}$. 1 b

Pre dané hodnoty $v_0 \approx 3{,}0$ m/s. 0,5 b

b) Disk B získa po náraze rýchlosť

$$v_B = \frac{2 m_A}{m_B + m_A} v_{A1} = \frac{2 m_A}{m_B + m_A} \sqrt{v_0^2 - 2 f g d_1} \qquad 0{,}5\text{ b}$$

a po dosadení za v_0

$$v_B = \frac{2 m_A}{m_B - m_A} \sqrt{2 f g d_1}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dráhu d_B disku B od okamihu zrážky po jeho zastavenie máme

$$d_B = \frac{1}{2 g f} v_B^2 = \frac{4 m_A^2}{\left(m_B - m_A\right)^2} d_1\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $d_B \approx 36$ cm. 0,5 b

3. Polievanie trávnika

Riešenie:

a) Objemový prietok $Q_V = S\,v$, kde $S = \pi\, d^2/4$ je obsah kruhového otvoru dýzy a v rýchlosť prúdenia vody v dýze.

Rýchlosť prúdenia vody dýzou určíme pomocou maximálnej výšky H dostreknutia vody.
Pohyb vody so začiatočnou výškou h a začiatočnou rýchlosťou v možno riešiť ako rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením $-g$, alebo pomocou energie

$$m g h + \frac{1}{2} m v^2 = m g H\,, \qquad \text{1 b}$$

odkiaľ máme

$$v = \sqrt{2g(H-h)}\,, \text{ a teda } \; Q_V = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g(H-h)}\,. \qquad \text{1 b}$$

Pre dané hodnoty $Q_V \approx 2{,}3$ l/s 1 s

b) Hmotnosť vody vo vzduchu, ktorá sa nachádza medzi ústím dýzy a miestom dopadu na trávnik je $M = \rho\, Q_V\, t$, kde t je čas, po ktorý voda prúdi medzi dýzou a trávnikom. Pohyb vody je vodorovný vrh so začiatočnou výškou h a začiatočnou rýchlosťou v vo vodorovnom smere a nulovou rýchlosťou v zvislom smere.

Čas letu vody je daný časom poklesu z výšky h na úroveň roviny trávnika. Pohyb v zvislom smere je voľný pád, pre ktorý platí

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \quad \text{resp. } \; t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Hmotnosť vody vo vzduchu

$$M = \rho \frac{\pi d^2}{2}\sqrt{h(H-h)}\,. \qquad \text{2 b}$$

Pre dané hodnoty $M \approx 1{,}15$ kg. 1 b

c) Pre prúdenie vody v hadici platí Bernoulliho rovnica a rovnica spojitosti toku. Ak uvažujeme bod A vo vnútri hadice a bod B v ústí dýzy, máme

$$\frac{1}{2}\rho v_\mathrm{h}^2 + p = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p_\mathrm{a}\,, \qquad \text{1 b}$$

kde p_a je atmosférický tlak v otvorenom otvore dýzy a $v_\mathrm{h} = \dfrac{d^2}{D^2} v$ rýchlosť vody v hadici. Tlak vody v hadici

$$p = \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)v^2 + \rho g h + p_\mathrm{a} = \rho g\left[(H-h)\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right) + h\right] + p_\mathrm{a}\,. \qquad \text{2 b}$$

Pre dané hodnoty $p \approx 199$ kPa. 1 b

4. Vodorovný vrh na Mesiaci

Riešenie:

a) Pri vodorovnom vrhu s minimálnou začiatočnou rýchlosťou v_1, pri ktorom úlomok obletí Mesiac a vráti sa do miesta vrhu, sa úlomok pohybuje po kružnicovej trajektórii tesne nad povrchom Mesiaca.

Pohybová rovnica pohybu

$$ma = F, \text{ kde } F = -G\frac{Mm}{R^2}, \text{ kde } m \text{ je hmotnosť úlomku.} \qquad (1)$$

Keďže gravitačná sila Mesiaca pôsobí kolmo na smer pohybu, nekoná prácu a pohyb je rovnomerný. Zrýchlenie úlomku má iba zotrvačnú (2)

Po dosadení (2) do (1) určíme rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \text{ Pre dané hodnoty } v_1 \approx 1{,}67 \text{ km/s.} \qquad (3) \qquad 3 \text{ b}$$

b) Pri vodorovnom vrhu s minimálnou začiatočnou rýchlosťou v_2, pri ktorej sa úlomok k povrchu Mesiaca nevráti, opustí gravitačné pole po parabolickej trajektórii.

Ak má úlomok uniknúť z gravitačného poľa, musí sa vzdialiť (teoreticky) do vzdialenosti $r \to \infty$. Keďže platí zákon zachovania plošnej rýchlosti, tzn. pre $r \to \infty$ je $v \to 0$. Vo vzdialenosti $r \to \infty$ platí $E_k = E_p = 0$.

Zo zákona zachovania mechanickej energie dostávame

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R} = \left(E_k + E_p\right)_{r\to\infty} = 0, \qquad 1 \text{ b}$$

odkiaľ máme

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \text{ Pre dané hodnoty } v_2 \approx 2{,}36 \text{ km/s.} \qquad 2 \text{ b}$$

c) Pri zvislom vrhu nahor sa zachováva mechanická energia úlomku. V najvyššom bode trajektórie je rýchlosť úlomku, a teda aj kinetickej energie, nulová

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{R+h}. \qquad 2 \text{ b}$$

Odtiaľ máme s použitím vzťahu (3)

$$h = R\frac{1}{\frac{2GM}{v_1^2 R} - 1} = R. \text{ Pre dané hodnoty } h = R \approx 1\,760 \text{ km.} \qquad 2 \text{ b}$$

60. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád 1, 2, Ivo Čáp 3, 4

Recenzia a úprava úloh a riešení: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Anikó Hevesi

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019