60. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2018/2019
kategória D – domáce kolo
Riešenie úloh

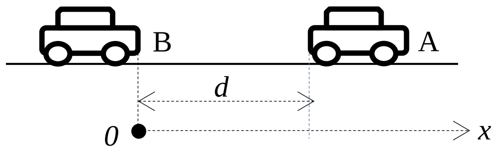
1. Brzdenie automobilu

Riešenie:

a) Maximálne spomalenia $a = \frac{F}{m} = f\,g$, tzn. $a_A = f_A\,g$, $a_B = f_B\,g$. 0,5 b

b) $d_{2S} = v \times (2\ \mathrm{s})$, pre rýchlosť $v_1 = 90\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ je $d_{2S} = 50\ \mathrm{m}$, pre $v_2 = 130\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ je $d_{2S} \approx 72\ \mathrm{m}$. 0,5 b

c) Súradnice automobilov na začiatku $x_B = 0\ \mathrm{m}$, $x_A = d$.
V čase t od začiatku brzdenia vozidla A sú súradnice vozidiel
$x_A = d + v\,t - \frac{1}{2}a_A\,t^2$ a $x_B = v\,\Delta t + v\,(t - \Delta t) - \frac{1}{2}a_B\,(t - \Delta t)^2$. 0,5 b
Rýchlosti vozidiel
$v_A = v - a_A\,t$ a $v_B = v - a_B\,(t - \Delta t)$. 0,5 b

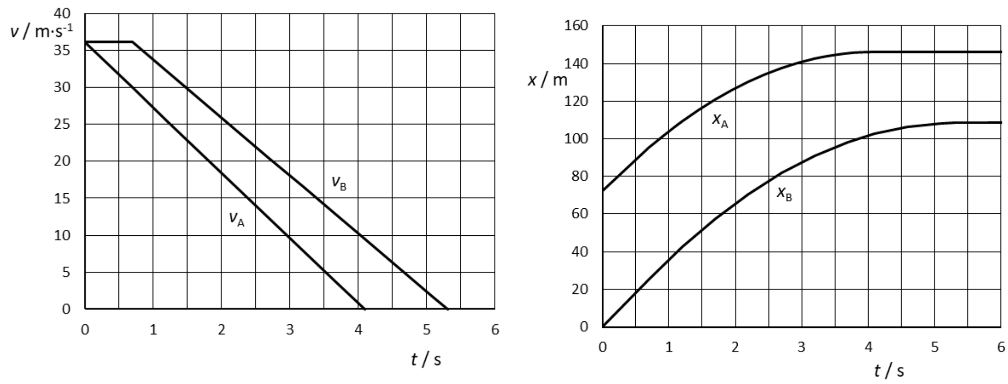


Obr. RD-1

1 b

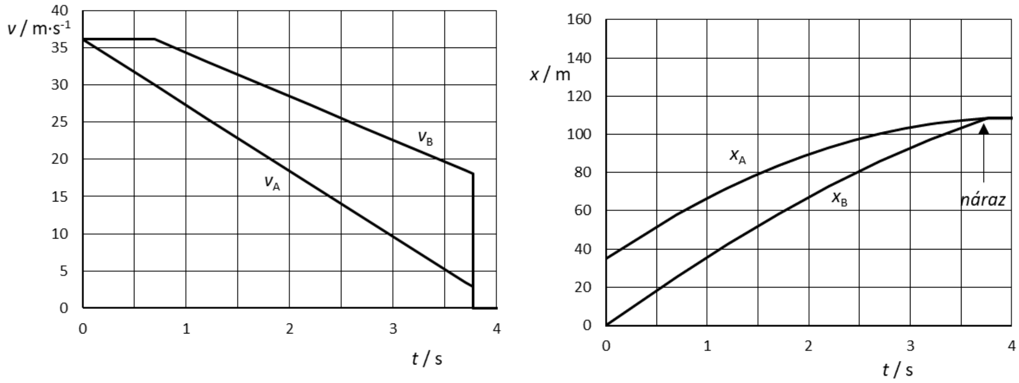
Grafy pre jednotlivé prípady:

- $f_A = 0{,}90$, $f_B = 0{,}80$, $v = 130\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $d = 72{,}2\ \mathrm{m}$, obr. RD–2 0,5 b



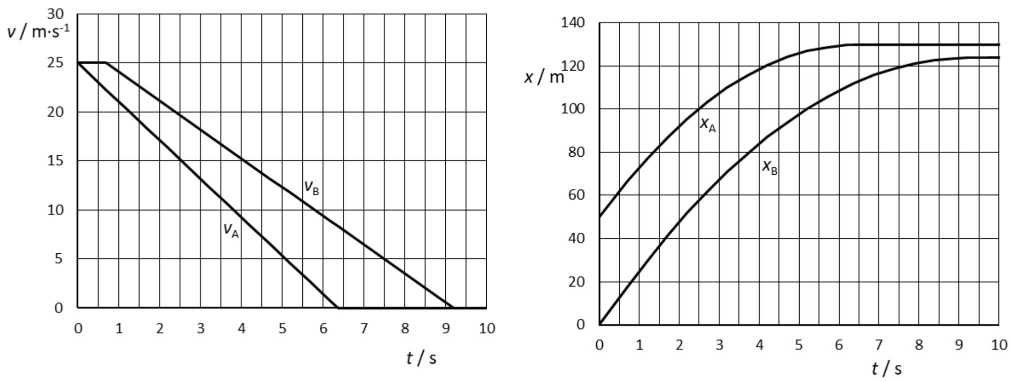
Obr. RD–2

- $f_A = 0{,}90$, $f_B = 0{,}60$, $v = 130\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $d = 35\ \mathrm{m}$, obr. RD–3 0,5 b



Obr. RD–3

- f_A = 0,40, f_B = 0,30 (mokrý asfalt), v = 90 km·h^{-1}, d = 50 m, obr. RD–4 0,5 b



Obr. RD–4

d) Ako vyplýva z grafov, pri dodržaní bezpečnej „dvojsekundovej“ vzdialenosti (prvý a tretí prípad) k zrážke vozidiel nedôjde. Ak je však vzdialenosť medzi automobilmi malá, v druhom prípade približne polovica „dvojsekundovej“ vzdialenosti, druhé vozidlo pri daných podmienkach nestačí zastaviť a dôjde k zrážke s prvým vozidlom. 1 b

Z grafu k druhému prípadu určíme čas zrážky približne t_z = 3,75 s. Tento čas môžeme spresniť tak, že graf nakreslíme vo väčšej mierke. 1 b

Po spresnení grafu podľa obr. RD–5 určíme čas zrážky t_z = 3,773 s. 1 b

V tomto čase sú rýchlosti oboch vozidiel

$v_A = v - a_A t_z$ a $v_B = v - a_B (t_z - \Delta t)$.

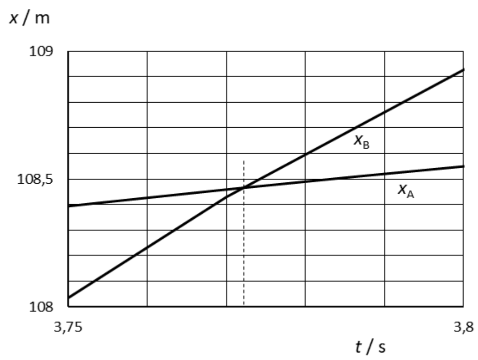
Pre daný prípad v = 130 km·h^{-1}, a_A = 8,82 m·s^{-2}, a_B = 5,88 m·s^{-2}, Δt = 0,70 s, a teda

$v_A \approx$ 2,83 m·s^{-1} = 10,2 km·h^{-1},

$v_B \approx$ 18,0 m·s^{-1} = 65,0 km·h^{-1}.

Rozdiel rýchlostí

$\Delta v \approx$ 15,2 m·s^{-1} $\approx$ 54,7 km·h^{-1}. 1 b



Obr. RD–5

Porovnaním s grafom rýchlosti na obr. RD–2 vidíme, že výsledok výpočtu zodpovedá hodnote určenej z grafu. 1 b

2. Mince na stole

Riešenie:

a) Mikrosvet: zrážky molekúl plynu, zrážky elektrónov s iónovou mriežkou, zrážky protónov v urýchľovači častíc a pod.

Makrosvet: zrážka automobilov, náraz srdca zvonu do tela zvonu, náraz hlavou do prekážky a pod.
Mega-svet: Zrážka asteroidu s planétou, zrážka čiernych dier.
V dôsledku zrážok molekúl plynu sa v plyne vytvára rovnováha (hustoty molekúl, teploty a tlaku), zrážky elektrónov s iónmi mriežky sú príčinou elektrického odporu vodiča, pri zrážke telies dochádza k ich deformácii (pri pružnej k dočasnej, pri nepružnej k trvalej), pri nepružnej zrážke sa telesá zohrievajú (niekedy až roztopia – napr. dopad asteroidu do Mexického zálivu, ktoré viedlo k vyhynutiu dinosaurov), pri zrážke čiernych dier vznikajú dostatočne silné gravitačné vlny pozorované aj na Zemi, atď.

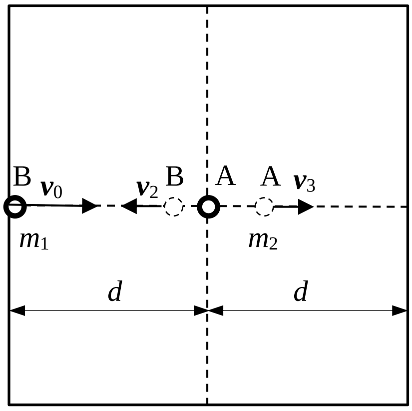
1 b

b) Tabuľka parametrov mincí

Nominálna hodnota	Hmotnosť *m* / g	Priemer *d* / mm	Výška *h* / mm
20 centov	5,74	22,25	2,14
1 euro (minca A)	7,50	23,25	2,33
2 eura	8,50	25,75	2,20

0,5 b

c) Situácia je znázornená na obr. RD–6.



Obr. RD–6

1 b

- c1) Ak mincu B vystrelíme rýchlosťou v_0, pohybuje sa s trením do stredu stola, kde príde s rýchlosťou v_1, ktorú určíme pomocou vzťahu $\Delta E_k = W$, kde ΔE_k je zmena kinetickej energie mince medzi okamihmi vystrelenia a prechodom mince stredom stola, W je práca trecej sily medzi okrajom a stredom stola.

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = F\,d = f\,m_1\,g\,d \text{ , odkiaľ máme } v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\,f\,g\,d} \,. \qquad (1) \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

Pri zrážke platí zákon zachovania hybnosti (ZZH) a v prípade dokonale pružnej zrážky zákon zachovania mechanickej energie (ZZME). Ak označíme v_1 rýchlosť nárazu vystrelenej mince do stojacej mince v strede stola, obr. RD–6, platí podľa ZZH

$$m_1 v_1 = m_1 v_2 + m_2 v_3, \text{ resp. } m_1 (v_1 - v_2) = m_2 v_3 \,, \qquad (2) \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

kde v_2, v_3 sú rýchlosti mincí po zrážke,
a podľa ZZME

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_3^2 \text{ , resp. } m_1\left(v_1^2 - v_2^2\right) = m_1\left(v_1 - v_2\right)\left(v_1 + v_2\right) = m_2 v_3^2 \text{ . (3)} \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

Z rovníc (2) a (3) získame po úprave vzťahy

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v_3 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 . \qquad (4) \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

V prvom prípade uvažujeme odraz prvej mince smerom nazad ($v_2 < 0$ m/s). Podľa (4) platí $m_1 < m_2$, resp. $m_B < m_A$, a teda minca B má hodnotu 20 centov. Aby sa odrazená minca vrátila do začiatočného bodu a zostala stáť, podľa (1) platí

$$0 = \sqrt{v_2^2 - 2\, f\, g\, d} \text{ , tzn. } v_2 = \sqrt{2\, f\, g\, d} \text{ .}$$

Spolu s (1) pre pohyb ku stredu a (4) pre odraz máme

$$\sqrt{2\, f\, g\, d} = \frac{\left|m_B - m_A\right|}{m_B + m_A} \sqrt{v_{01}^2 - 2\, f\, g\, d} \text{ , odkiaľ } v_{01} = 2\sqrt{f\, g\, d}\, \frac{\sqrt{m_B^2 + m_A^2}}{\left|m_B - m_A\right|} \text{ .}$$

Pre dané hodnoty veličín: $v_{01} \approx 8{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

Zo (4) vyplýva $v_3/v_2 = 2\, m_B / (m_B - m_A) = -6{,}5$. Pre hmotnosti mincí 1 € a 20 c máme $|v_3| > |v_2|$, tzn. minca A na stole nezastaví a v strede protiľahlej strany stola zo stola spadne. Pre pohyb na dráhe d k okraju stola platí

$$\frac{1}{2} m_A v_3^2 - \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 = f\, m_A\, g\, d \text{ .}$$

Odtiaľ máme

$$v_{A1} = \sqrt{v_3^2 - 2\, f\, g\, d} = \sqrt{2\, f\, g\, d} \sqrt{\frac{8 m_B^2 \left(m_A^2 + m_B^2\right)}{\left(m_A^2 - m_B^2\right)} - 1} \text{ .}$$

Pre dané hodnoty $v_{A1} \approx 7{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

celá časť c1) spolu 4 b

- c2) V druhom prípade musí prejsť minca A až na okraj stola

$$\frac{1}{2} m_A v_3^2 = f\, m_A\, g\, d \text{ .}$$

S použitím (4) a (1) máme

$$v_{02} = \sqrt{2 f\, g\, d} \sqrt{\left(\frac{m_B + m_A}{2 m_B}\right)^2 + 1} \text{ . Pre dané hodnoty } v_{02} \approx 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

Minca B sa odrazí nazad rýchlosťou v_2 a prejde vzdialenosť

$$d_2 = \frac{v_2^2}{2\, f\, g} \text{ . Po dosadení } d_2 = d \left(\frac{m_A - m_B}{2 m_B}\right)^2 \text{ . Pre dané hodnoty } d_2 \approx 9{,}4 \text{ mm.} \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

za časť c2) spolu 1 b

- c3) Ak sa minca C zastaví, znamená to podľa (4) a pre $v_2 = 0$, že $m_A = m_C$, tzn. nominálna hodnota mince C je 1 €.

Podľa (4) sa minca A po zrážke pohybuje s rovnakou rýchlosťou, akou do nej narazila minca C. Keďže dráha nezávisí od hmotnosti, možno pohyb mincí považovať za plynulý pohyb mince od jedného okraja k druhému, tzn. po dráhe $2d$, a teda podľa (1) pre $v_1 = 0$

$$v_{03} = \sqrt{2\, f\, g\, 2d} = \sqrt{4\, f\, g\, d}$$. Pre dané hodnoty $v_{03} \approx 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 0,5 b

- c4) Ak sa minca D po zrážke pohybuje ďalej v rovnakom smere, podľa (4) platí $m_D > m_A$, tzn. minca D má hodnotu 2 €.

Minca D má po zrážke rýchlosť, podľa (1),

$v_2 = \sqrt{2\, f\, g\, d}$ a po dosadení do (4) $v_1 = \dfrac{m_D + m_A}{m_D - m_A} v_2 = \dfrac{m_D + m_A}{m_D - m_A} \sqrt{2\, f\, g\, d}$.

Z (1) dostávame

$v_1 = \sqrt{v_{04}^2 - 2\, f\, g\, d}$, a teda

$$v_{04} = \sqrt{v_1^2 + 2\, f\, g\, d} = \sqrt{2\, f\, g\, d}\sqrt{\left(\frac{m_D + m_A}{m_D - m_A}\right)^2 + 1}\,.$$

Pre dané hodnoty $v_{04} \approx 17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

Minca A podľa (4) má po zrážke rýchlosť

$$v_3 = \frac{2 m_D}{m_D + m_A} v_1 = \frac{2 m_D}{m_D + m_A} \sqrt{v_{04}^2 - 2\, f\, g\, d}\,.$$

Pre pohyb na dráhe d k okraju stola platí

$\dfrac{1}{2} m_A v_3^2 - \dfrac{1}{2} m_A v_{A2}^2 = f\, m_A\, g\, d$. odkiaľ máme

$v_{A2} = \sqrt{2\, f\, g\, d}\sqrt{\left(\dfrac{2 m_D}{m_D - m_A}\right)^2 - 1}$. Pre dané hodnoty $v_{A2} \approx 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

za časť c4) spolu 2 b

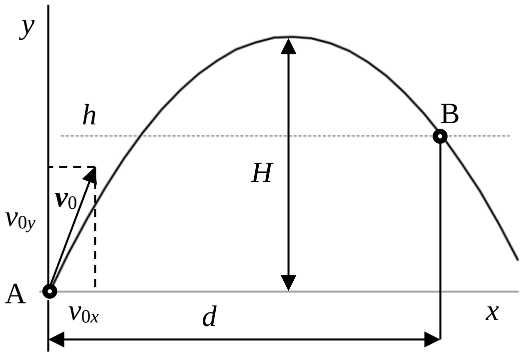
Pozn. Ak žiak rieši úlohu iným postupom, pridelia sa body za jednotlivé časti úlohy c1) – c4), pokiaľ je riešenie správne.

3. Hod loptičkou

Riešenie:

a) Obr. RD–7 1 b

Šikmý vrh je zložený pohyb, ktorý sa skladá z pohybu vo vodorovnom smere x, v ktorom pôsobí na loptičku nulová sila, tzn. pohyb je rovnomerný, a pohybu v zvislom smere y, v ktorom na loptičku pôsobí konštantná tiažová sila $\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{g}$ smerom nadol, ktorá loptičke udeľuje zrýchlenie $-g$, tzn. ide o rovnomerne zrýchlený pohyb. Začiatočnú rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ môžeme rozdeliť na vodorovnú zložku v_{0x} a zvislú zložku v_{0y}. Rovnice pohybu sú



Obr. RD–7

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} - g\,t \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

$$x = v_{0x}\,t \qquad y = v_{0y}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2\ . \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

b) Loptička v najvyššom bode svojej trajektórie má nulovú zvislú zložku rýchlosti $v_y = 0$, tzn. podľa (1)

$$t_H = \frac{v_{0y}}{g}\text{, a teda } H = v_{0y}\,t_H - \frac{1}{2}g\,t_H^2 = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Doba letu od okamihu vrhu po dosiahnutie najvyššieho bodu sme označili t_H.

Zvislú zložku rýchlosti určíme z podmienky dosiahnutia výšky h v čase t_1

$$h = v_{0y}\,t_1 - \frac{1}{2}g\,t_1^2\,,$$

odkiaľ máme

$$v_{0y} = \frac{h}{t_1} + \frac{1}{2}g\,t_1\,, \qquad (3)$$

a teda $H = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{h}{t_1} + \dfrac{1}{2}g\,t_1\right)^2$. Pre dané hodnoty $H \approx 8{,}2$ m. 2 b

Zložka rýchlosti v zvislom smere v okamihu preletu okolo balkóna

$v_{y1} = v_{0y} - g\,t_1 = \dfrac{h}{t_1} - \dfrac{1}{2}g\,t_1$. Pre dané hodnoty $v_{y1} \approx -7{,}9\ \text{m·s}^{-1} < 0$,

tzn. v čase t_1 loptička pri pohybe okolo chlapca klesala. 1 b

c) Loptička prekonala vo vodorovnom smere vzdialenosť d, tzn. vodorovná zložka začiatočnej rýchlosti, podľa (2),

$$v_{0x} = \frac{d}{t_1}\ .$$

Keďže zložky rýchlosti sú navzájom kolmé, s použitím (3) určíme výslednú rýchlosť vrhu pomocou Pytagorovej vety

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{h}{t_1} + \frac{1}{2} g\, t_1\right)^2} \, .$$

Pre dané hodnoty $v_0 \approx 15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. 2 b

d) Uhol α určíme buď tak, že nakreslíme pravouhlý trojuholník s odvesnami v_{0x} a v_{0y} a uhol oproti strane v_{0y} zmeriame uhlomerom, alebo, ak poznáme funkciu tangens (pomer strany protiľahlej k danému uhlu a strany priľahlej), použijeme pre určenie uhlu kalkulačku.

$$\tan \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{t_1}{d}\left(\frac{h}{t_1} + \frac{1}{2} g\, t_1\right) = \frac{h}{d} + \frac{g\, t_1^2}{2d} \, .$$

Pre dané hodnoty $\tan \alpha \approx 1{,}77$ a pomocou kalkulačky alebo tabuliek určíme $\alpha \approx 61°$. 1 b

e) Pre dopad loptičky platí $y = 0$. Určíme čas dopadu, podľa (1),

$y_2 = v_{0y}\, t_2 - \frac{1}{2} g\, t_2^2 = 0$, odkiaľ máme $t_2 \left(v_{0y} - \frac{1}{2} g\, t_2 \right) = 0$, a teda $t_2 = \frac{2 v_{0y}}{g}$.

Súradnica x v tomto čase

$D = v_{0x}\, t_2 = \frac{d}{t_1} \frac{2 v_{0y}}{g} = \left(\frac{2h}{g\, t_1^2} + 1 \right) d$. Pre dané hodnoty $D \approx 18$ m. 1 b

4. Prejazd automobilov križovatkou

Riešenie:

a) Ak dosiahne automobil rovnomerne zrýchleným pohybom rýchlosť v_m na dráhe d_m, je zrýchlenie

$a_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{m}^2}{2 d_\mathrm{m}}$. Pre dané hodnoty $a_\mathrm{m} \approx 3{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. 1 b

b) Tangenciálne zrýchlenie a_1 pri prechode z bodu A do bodu B

$v_\mathrm{B1} = \frac{2 s_1}{t_1}$. Pre dané hodnoty $v_1 \approx 21$ km/h. 1 b

c) Ťahová sila $F_\mathrm{m} = m\, a_1$ sa rozdelí na predné kolesá rovnomerne. Medzi štyri kolesá sa rozdelí rovnomerne zotrvačná sila v zákrute $F_\mathrm{o} = m\, v^2/R$. Maximálna hodnota zotrvačnej sily je v bode B, v ktorom je rýchlosť automobilu V1 maximálna. Polomer krivosti trajektórie určíme z dĺžky oblúka $s_1 = (\pi/2)\, R$- Obidve sily sú vzájomne kolmé. Pri prechode zákrutou musí byť výsledná vodorovná sila na predné pneumatiky menšia ako medzná sila statického trenia $F_{\mathrm{t\,max}} = ½\ f\, m g$ (na predné kolesá pôsobí polovica tiažovej sily). Podmienka statického trenia

$$\sqrt{(m a_1)^2 + \left(\frac{1}{2} m \frac{v_\mathrm{B1}^2}{R}\right)^2} \le \frac{1}{2} m g\, f_1 \, ,$$

po úprave, ktorej cieľom je vylúčiť z nerovnosti neznáme veličiny m, v_B1, a_1 a R dostaneme

$$\frac{4 s_1}{g\, t_1^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \le f_1 \, . \qquad (1)$$

Pre dané hodnoty ľavá strana nerovnice má veľkosť 0,49 – čo je menšie ako hodnota $f_1 = 0{,}80$. Automobil prejde z bodu A do bodu B bez šmyku. 1 b

d) Z podmienky (1) určíme čas

$$t_2 \geq \sqrt{\frac{4 s_1}{g\, f_2}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}}\ .$$ Pre dané hodnoty $t_{2\ \mathrm{min}} \approx 6{,}3$ s. 1 b

Za tento čas dosiahne automobil rýchlosť

$$v_{\mathrm{B2}} = \frac{2 s_1}{t_2}\ .$$ Pre dané hodnoty $v_{\mathrm{B2}} \approx 15$ km/h. 1 b

e) Najprv určíme vzdialenosť d_{10}. Automobil V1 prejde do bodu B za čas t_1. V tomto okamihu musí mať d_1 hodnotu najmenej d_3 (automobil V2 musí byť najmenej vo vzdialenosti d_4). Začiatočná vzdialenosť automobilu V2 od križovatky

$$d_{10} = v_1 t_1 + d_4\ .$$ Pre dané hodnoty $d_{10} \approx 73$ m. 1 b

Automobil V3 prejde za čas t_1 vzdialenosť $v_2\, t_1$ a vzájomná vzdialenosť automobilov V3 a V1 je

$$x_0 = d_{20} - v_2 t_1 + d_3 - l\ . \qquad (2)$$

Ďalej V1 pokračuje rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením a_{m} a začiatočnou rýchlosťou v_{B}, až po dosiahnutie rýchlosť v_2. Vzdialenosť medzi automobilmi V3 a V1 sa počas celého zrýchľovania V1 zmenšuje až po vyrovnanie rýchlostí 50 km/h. Ak spojíme vzťažnú sústavu s automobilom V2, tento relatívny pohyb V1 a V2 predstavuje rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením a_{m}, začiatočnou rýchlosťou $v_{\mathrm{B}} - v_2$ a konečnou rýchlosťou nulovou. Čas zrýchľovania je tak

$$t_z = \frac{v_2 - v_{\mathrm{B}}}{a_{\mathrm{m}}}\ .$$

Za tento čas dosiahne vzájomná vzdialenosť automobilov

$$x = x_0 + \frac{1}{2} a_{\mathrm{m}} t_{\mathrm{z}}^2 - \left(v_2 - v_{\mathrm{B}}\right) t_{\mathrm{z}} = x_0 - \frac{\left(v_2 - v_{\mathrm{B}}\right)^2}{2 a_{\mathrm{m}}}\ .$$

Ak dosadíme podmienku pre najmenšiu dovolenú vzdialenosť $x = d_4$ a použijeme (2), máme

$$d_4 = d_{20} - v_2 t_1 + d_3 - l - \frac{\left(v_2 - v_{\mathrm{B}}\right)^2}{2 a_{\mathrm{m}}}\ ,$$

odkiaľ dostávame

$$d_{20} = d_4 + v_2 t_1 - d_3 + l + \frac{\left(v_2 - v_{\mathrm{B}}\right)^2}{2 a_{\mathrm{m}}}\ . \qquad (3)$$ 1 b

Ak je vozovka suchá a možno využiť maximálne zrýchlenie a_{m} a rýchlosť v_{B1} máme pre dané a vypočítané hodnoty $d_{20} \approx 76$ m. 1 b

f) Ak by bola vozovka klzká, umožňuje vozidlu V1 od bodu B maximálne zrýchlenie

$$a_{\mathrm{m2}} = \frac{F_{\mathrm{T}}}{m} = \frac{1}{m}\frac{f\, m g}{2} = \frac{1}{2} f\, g\ .$$ Pre dané hodnoty $a_{\mathrm{m2}} \approx 1{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. 1 b

Táto hodnota je menšia ako a_{m}, preto maximálne zrýchlenie nemožno využiť.

Ak dosadíme do (3) $t_1 \rightarrow t_{2\ \mathrm{min}}$, $v_{\mathrm{B}} \rightarrow v_{\mathrm{B2}}$ a $a_{\mathrm{m}} \rightarrow a_{\mathrm{m2}}$, dostaneme $d_{20} \approx 130$ m. 1 b

Ako vidíme z výsledku, v prípade klzkej vozovky treba byť obzvlášť pozorný a počítať s tým, že brzdné a rozbehové vzdialenosti sa významne zväčšujú.

5. Meranie úrovne voľnej hladiny vody v nádrži

Riešenie:

a) Priemer určíme zo vzťahu pre hmotnosť valca

$$m = \rho_{\mathrm{Al}}\, V = \rho_{\mathrm{Al}} \frac{\pi d^2}{4} H, \text{ odkiaľ máme } d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{\mathrm{Al}} H}} .$$

Pre dané hodnoty $d \approx 2{,}2$ cm. 2 b

b) Ak je výška hladiny h_1 a valec je celý vynorený nad voľnou hladinou, je podmienka rovnováhy síl

$$m g = k\left(l_1 - l_0\right), \qquad (1)$$

kde l_1 je dĺžka deformovanej pružiny a l_0 dĺžka nezaťaženej pružiny.

Ak sa nádrž naplní do výšky h_0, pružina sa skráti o x_1 a valec je ponorený do vody dĺžkou $y = h_0 - h_1 - x_1$. Na valec pôsobí okrem tiažovej sily aj sila vztlaková. Podmienka rovnováhy síl je

$$m g - \rho_{\mathrm{v}} S y g = k\left(l_2 - l_0\right) , \qquad (2)$$

kde l_2 je dĺžka deformovanej pružiny v tomto prípade.

Z rozdielu (1) a (2) dostávame

$$\rho_{\mathrm{v}} S y g = k x_1 , \qquad (3)$$

kde $x_1 = l_1 - l_2$.

Z (3) po úprave dostávame (tiež dosadením $y = h_0 - h_1 - x_1$), $S = m/(H \rho_{\mathrm{Al}})$

$$k = \frac{\rho_{\mathrm{v}} S y g}{x_1} = \frac{m g}{H} \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{Al}}} \left(\frac{h_0 - h_1}{x_1} - 1 \right). \qquad (4)$$

2 b

Pre dané hodnoty veličín $k \approx 54\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. 1 b

c) Ak hladina vody v nádrži poklesne z hodnoty h_0 o Δh, podmienka rovnováhy síl má tvar

$$m g - \rho_{\mathrm{v}} S\left(h_0 - \Delta h - h_1 + x\right) g = k\left(l_3 - l_0\right). \qquad (5)$$

Od (2) odčítame (5)

$$\rho_{\mathrm{v}} S g\left(x - x_1 - \Delta h\right) = k\left(l_2 - l_3\right) \qquad (6)$$

Ak uvážime $l_2 - l_3 = x - x_1$ a označíme výchylku ručičky pre stav $\Delta h = 0$ (plná nádrž) $x_1 = 0$, zo vzťahu (6) dostaneme hľadanú funkciu

$$x = \frac{\rho_{\mathrm{v}} S g}{k + \rho_{\mathrm{v}} S g} \Delta h = p \Delta h .$$

3 b

Funkcia $x = \mathrm{f}(\Delta h)$ je lineárna.

Dosadíme z (4)

$$p = \frac{x}{\Delta h} = \frac{\rho_{\mathrm{v}} S g}{k + \rho_{\mathrm{v}} S g} = \frac{x_1}{h_0 - h_1} .$$

Pre dané hodnoty $p \approx 6{,}3 \times 10^{-2}$. 2 b

6. Stretnutie telies na obežnej trajektórii Mesiaca

Riešenie:

a) Pri pohybe sondy S po kružnicovej trajektórii oko Mesiaca je gravitačná sila medzi sondou a Mesiacom rovná zotrvačnej (odstredivej) sile pôsobiacej na sondu

$$G\frac{M\,m_{\mathrm{s}}}{\left(R+h\right)^2}=m_{\mathrm{s}}\frac{v_{\mathrm{s}}^2}{R+h}$$, kde m_{s} je hmotnosť sondy.

Z toho rýchlosť sondy

$$v_{\mathrm{s}}=\sqrt{G\frac{M}{R+h}}$$. Pre dané hodnoty $v_{\mathrm{s}} \approx 1{,}66\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. (1) 1 b

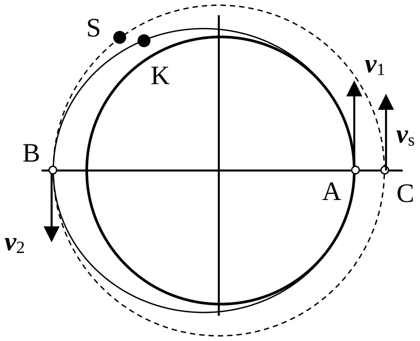
Doba obehu

$$T_{\mathrm{s}}=\frac{2\pi\left(R+h\right)}{v_{\mathrm{s}}}=2\pi\frac{\left(R+h\right)^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$ (2) 1 b

Pre dané hodnoty $T_{\mathrm{s}} \approx 6\,785\ \mathrm{s} \approx 1\ \mathrm{h}\ 53\ \mathrm{min}\ 5\ \mathrm{s}$.

b) Kontajner K v centrálnom gravitačnom poli sa pohybuje po trajektórii v tvare kužeľosečky (1. Keplerov zákon), v našom prípade elipsy, obr. RD–6. Vrcholom elipsy je bod A vypustenia kontejneru na obežnú trajektóriu. Aby bola rýchlosť v_1 čo najmenšia, vzdiali sa kontejner od povrchu Mesiaca o najmenšiu vzdialenosť, tzn. do výšky h. Bod B stretnutia sondy s kontajnerom je druhým vrcholom elipsy, v ktorom je rýchlosť $\boldsymbol{v}_2$ kontajneru a sondy kolmá na spojnicu kontejneru so stredom Mesiaca.

Vysvetlenie a obr. RD–6 1 b



Obr. RD–6

Pre pohyb kontajneru K v gravitačnom poli Mesiaca platí zákon zachovania mechanickej energie (súčtu kinetickej a potenciálnej energie vzhľadom na Mesiac)

$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{M\,m}{R}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{M\,m}{R+h}$$, kde m je hmotnosť kontejneru. (3) 0,5 b

Gravitačná sila má smer do stredu Mesiaca, preto moment gravitačnej sily vzhľadom na stred Mesiaca je nulový. Moment hybnosti kontajnera sa preto zachováva. (2. Keplerov zákon)

$$mv_1R=mv_2\left(R+h\right).$$ (4) 0,5 b

Z (1) a (2) vyjadríme rýchlosti v_1 a v_2

$$v_1=\sqrt{2GM\,\frac{R+h}{R\left(2R+h\right)}},$$ (5) 1 b

$$v_2=\sqrt{2GM\,\frac{R}{\left(R+h\right)\left(2R+h\right)}}.$$ (6) 1 b

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 1{,}69\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, $v_2 \approx 1{,}64\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Relatívna rýchlosť v okamihu stretnutia

$$\Delta v=v_2-v_{\mathrm{s}}=\sqrt{2GM\,\frac{R}{\left(R+h\right)\left(2R+h\right)}}-\sqrt{G\frac{M}{R+h}}=v_{\mathrm{s}}\left(\sqrt{\frac{2R}{2R+h}}-1\right).$$ (7)

Pre dané hodnoty $\Delta v \approx -11{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx -42{,}5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. 1 b

Pozn.: Keďže sa v_2 a v_s líšia až v tretej platnej číslici, je výsledok získaný rozdielom vypočítaných a zaokrúhlených hodnôt (20 m·s^{-1}) značne nepresný, preto pre výpočet Δv treba použiť uvedený výsledný vzťah (7).

To znamená, že v okamihu stretnutia sonda dobieha kontajner.

c) Kontajner prejde dráhu z bodu A do bodu B za polovicu periódy obehu T_k. Pre určenie doby T_k použijeme 3. Keplerov zákon

$$\left(\frac{T_k}{T_s}\right)^2 = \left(\frac{a}{R+h}\right)^3,$$

kde $a = \dfrac{2R+h}{2}$ je veľkosť hlavnej polosi elipsy (polovica vzdialenosti AB).

Odtiaľ máme

$$T_k = T_s\left[\frac{2R+h}{2(R+h)}\right]^{3/2} < T_s. \qquad 1\ \text{b}$$

Keďže čas T_k je kratší ako T_s, kontajner je potrebné vyslať s oneskorením Δt za prechodom sondy bodom C

$$\Delta t = \frac{1}{2}(T_s - T_k) = \frac{1}{2}T_s\left\{1-\left[\frac{2R+h}{2(R+h)}\right]^{3/2}\right\} = \pi\frac{(R+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}}\left\{1-\left[\frac{2R+h}{2(R+h)}\right]^{3/2}\right\}. \qquad 1\ \text{b}$$

Pre dané hodnoty $\Delta t \approx 70{,}8$ s.

Pozn.: Opäť platí pravidlo o malom rozdiele veľkých čísiel.

Čas t_k od vypustenia kontejneru do stretnutia so sondou

$$t_k = \frac{T_k}{2} = \frac{T_s}{2}\left[\frac{2R+h}{2(R+h)}\right]^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{GM}}\left[R+\frac{h}{2}\right]^{3/2}.$$

Pre dané hodnoty $t_k \approx 3\,328$ s $\approx$ 55 min 28 s. 1 b

Pozn. k bodovaniu: v prípade nesprávneho výsledku pre dané hodnoty znížiť hodnotenie za príslušný výsledok o 0,25b. V prípade chyby v 3. číslici výsledok akceptovať.

7. Skúmanie odporu vzduchu pri voľnom páde rôznych

experimentálna úloha 10 b

60. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (1-3), Ivo Čáp (4 -7)

Recenzia a úprava úloh a riešení: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019