60. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2018/2019
kategória C – domáce kolo
Texty úloh

1. Ťahanie kmeňa stromu z vodnej nádrže

Na hladine vodnej nádrže pláva kolmo na hrádzu a vo vzdialenosti a od hrádze dlhý drevený kmeň stromu s dĺžkou L a priemerom D. Drevár sa rozhodol kmeň vytiahnuť z vody. Na hrádzi bol žeriav, ktorého horná kladka sa nachádzala nad hranou hrádze vo výške $h > L$ nad hladinou vody v nádrži. Na koniec kmeňa bližší k hrádzi pripevnil lano žeriavu. Druhý koniec lana bol pripevnený k bubnu žeriavu s polomerom r. Po zapnutí motora žeriavu sa bubon otáčal s konštantnou frekvenciou N otáčania a navíjal lano.

a) Vysvetlite, ako sa bude kmeň pohybovať po zapnutí navijaku žeriavu. Nakreslite ilustračný obrázok a vyznačte v ňom charakteristické polohy kmeňa. Pohyb kmeňa považujte za pomalý, zrýchlenie pohybu kmeňa je veľmi malé.

b) Vyjadrite vzdialenosť x upevneného konca kmeňa od hrádze ako funkciu času t. Určte dobu t_1 od začiatku pohybu, za ktorý koniec kmeňa narazí do hrádze. Pre dané hodnoty zostrojte graf funkcie $x(t)$ vzdialenosti x ako funkcie času t.

c) Určte uhol α, ktorý kmeň zviera s hladinou, ako funkciu času t pre $t > t_1$. Určte dobu t_2 od zapnutia motora žeriavu, za ktorý sa kmeň postaví do zvislej polohy, a dĺžku y_2 kmeňa vyčnievajúcu nad hladinu v čase t_2. Určte čas t_3, za ktorý sa celý kmeň vynorí nad hladinu vody v nádrži.

d) Určte silu F ťahu lana ako funkciu času t od zapnutia motora žeriavu až do úplné vytiahnutie kmeňa nad hladinu vody. Zostrojte graf sily F ako funkcie času t.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $L = 10$ m, $D = 30$ cm, hustota dreva $\rho = 700\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $a = 20$ m, $h = 15$ m, $r = 10$ cm, $N = 30\ \mathrm{min^{-1}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, hustota vody $\rho_v = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.
Kmeň považujte za dlhý tenký homogénny valec, hmotnosť lana, zmenu priemeru bubna v dôsledku navíjania lana ani odpor vody proti pohybu kmeňa neuvažujte.

2. Pulzar v Krabej hmlovine

Jedným z pozoruhodných objektov vo vesmíre je pulzar v Krabej hmlovine, vzdialený 2 200 pc od Zeme. Krabí pulzar sa vyznačuje tým, že vysiela do vesmíru impulzy žiarenia s periódou impulzov $T = 33{,}5$ ms. Pulzar je neutrónová hviezda, ktorá je pozostatkom po výbuchu supernovy, ktorý pozorovali v Číne v roku 1054 a ktorý bol vidieť na oblohe aj cez deň ako jasne svietiaci bod.

a) Uveďte, ako sú definované astronomické jednotky dĺžky: 1 ly (svetelný rok), 1 au (astronomická jednotka), 1 pc (parsek). Vyjadrite vzdialenosť d pulzaru od Zeme v jednotkách ly.

Neutrónová hviezda je konečné štádium vývoja hviezdy s hmotnosťou $M \in (1{,}4;\ 2{,}2)\ M_S$, kde M_S je hmotnosť Slnka. Polomer veľmi rýchlo rotujúcej neutrónovej hviezdy je 10 až 20 km. Keďže neutrónová hviezda má veľmi silné magnetické pole, vzniká pri jej rotácii synchrotrónové žiarenie, vyžarované v úzkom kuželi, ktorý rotuje spolu s hviezdou. Zem je zasiahnutá týmto kužeľom v pravidelných intervaloch – impulzoch röntgenového žiarenia, ktoré zodpovedajú perióde rotácie hviezdy. Neutrónová hviezda je tvorená husto usporiadanými neutrónmi a má hustotu zodpovedajúcu približne hustote atómového jadra, resp. hustote nukleónov.

b) Neutrón si predstavte ako homogénnu guľovú časticu s polomerom $r_n \approx 0{,}8$ fm a hmotnosťou $m_n = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg. Určte hustotu ρ_n neutrónu a porovnajte ju s hustotou $\rho_v = 1\,000$ kg·m^{-3} vody.

c) Predpokladajte, že hustota neutrónovej hmoty je rovná hustote ρ_n jedného neutrónu. Určte priemer D_n neutrónovej gule s hmotnosťou $m_1 = 1\,000$ t. Určte hmotnosť M_K Krabieho pulzaru, ak je jeho polomer $R_K \approx 10$ km, a vyjadrite ju ako násobok hmotnosti Slnka $M_S \approx 2{,}0 \times 10^{30}$ kg.

d) Neutrónová hviezda je výdatným zdrojom energie elektromagnetického žiarenia vyžarovaného do vesmíru. V dôsledku tejto straty energie sa predlžuje perióda rotácie. Bola odmeraná zmena periódy rotácie hviezdy $\Delta T = -\,38$ ns za dobu $\Delta t = 1$ deň. Určte výkon P_K žiarenia Krabieho pulzaru zodpovedajúci spomaľovaniu jeho rotácie. Tento výkon porovnajte s výkonom žiarenia Slnka $P_S \approx 3{,}8 \times 10^{26}$ W.

Pozn.: Moment zotrvačnosti homogénnej gule vzhľadom na jej os $I = (2/5)\,M R^2$, kde M je hmotnosť gule a R jej polomer. Pri riešení časti d) možno využiť približný vzťah $(1 + x)^n \approx 1 + n\,x$ pre $x << 1$ a ľubovoľné n.

3. Zaváranie ovocia

V období zberu ovocia a zeleniny si gazdinky robia zásoby na zimné obdobie. Najpoužívanejšou metódou je zaváranie. Sklenený pohár sa naplní z väčšej časti okolo 95 % objemu ovocím a sirupom, jemne sa uzatvorí skrutkovacím viečkom a zohrieva sa dlhší čas pri teplote okolo 85 °C. Potom sa pohár nechá vychladnúť, čím sa zníži tlak plynu nad hladinou sirupu, viečko sa pevne prisaje k okraju pohára a zabráni vniknutiu vzduchu z okolia do pohára. Pri zohrievaní sa v obsahu pohára vyhubia všetky mikroorganizmy a zníži sa množstvo kyslíka, takže zavarený obsah sa nekazí a vydrží neporušený dlhý čas skladovania.

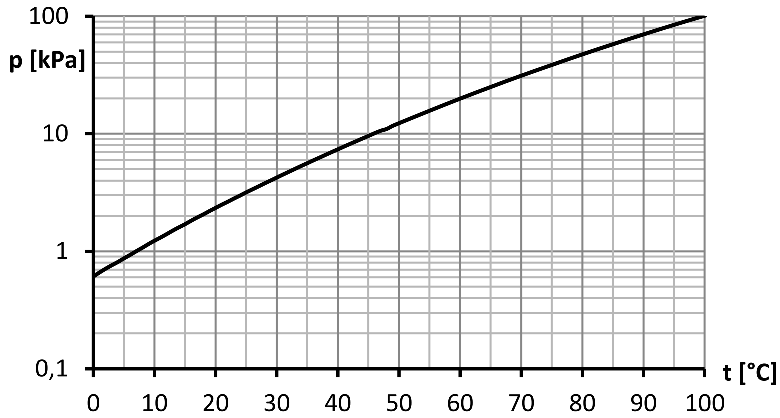
a) Zoznámte sa s veličinami *absolútna* Φ a *relatívna* φ vlhkosť vzduchu. Zistite parciálny tlak kyslíka vo vzduchu s nulovou absolútnou vlhkosťou pri normálnom tlaku vzduchu. Uveďte, prečo sa človek v prostredí s relatívnou vlhkosťou 100 % a teplotou 100 °C zadusí.

b) Uvažujte pohár s objemom $V_0 = 0{,}70$ l naplnený ovocím so sirupom na $v = 95$ % objemu, pričom nad hladinou uzatvoreného pohára je pri tlaku $p_0 = 101$ kPa a teplote $t_1 = 20$ °C vzduch s relatívnou vlhkosťou $\varphi_1 = 40$ %. Určte látkové množstvo n_1 kyslíka vo vzduchu v pohári.

c) Potom sa pohár zohreje na teplotu $t_2 = 85$ °C a ponechá sa pri tejto teplote dostatočne dlhý čas. Prebytočný vzduch z pohára uniká jemne privretým viečkom, takže plyn v pohári má stále atmosférický tlak $p_0 = 101$ kPa. Postupne sa v pohári vytvorí po odparení malého množstva vody rovnováha medzi vzduchom a kvapalinou, čo znamená, že vzduch v pohári dosiahne relatívnu vlhkosť $\varphi_2 = 100$ %. Určte látkové množstvo n_2 kyslíka vo vzduchu v pohári a porovnajte ho s hodnotou n_1.

d) Určte moment sily M potrebný na uvoľnenie viečka zavareného pohára pri teplote t_1. Priemer hrdla pohára, na ktoré dosadá tesnenie viečka, $d = 83$ mm a faktor trenia medzi tesnením viečka a okrajom pohára $f = 0{,}80$.

Závislosť tlaku nasýtenej vodnej pary od teploty je na obr. C–1



Obr. C–1 (pozrite napr. http://people.tuke.sk/jaroslav.dzmura/files/tabulky.pdf)

4. Krúpy

20. júna 2016 sa nad väčšinou územia Slovenska prehnala silná búrka. Na mnohých miestach bola sprevádzaná krupobitím. V regionálnych správach sme sa dočítali, že „búrka priniesla v Rajci krúpy o veľkosti 2 až 3 centimetre, v Žiline zhruba len 1 cm.“ Ľudia si často kladú otázku, či môžu byť pre nich takéto krúpy nebezpečné. Pokúsime sa to vyjasniť pomocou jednoduchého modelu.

Podľa meteorológov je ***krúpa*** *alebo* ***ľadovec*** *guľovitý, kužeľovitý alebo nepravidelný kus ľadu s priemerom väčším ako 5 mm. Výskyt krúp je viazaný na oblaky typu kumulonimbus (búrkové oblaky). V búrkových oblakoch sa vyskytujú silné výstupné a zostupné prúdy, ktoré umožňujú namŕzanie prechladenej vody na iných ľadových časticiach. Tak vznikajú a rastú krúpy. To pokračuje tak dlho, kým krúpa nepresiahne hmotnosť, ktorú je výstupný prúd schopný niesť. Potom začínajú krúpy padať a nastáva krupobitie.*

Predpokladajme, že krúpy majú približne guľový tvar, pre ktorý je koeficient aerodynamického odporu $C_g = 0{,}48$ a hustota vzduchu $\rho_{vz} = 1{,}29\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ sa s výškou nad povrchom zeme nemení.

a) Pôsobením odporu vzduchu sa po určitom čase od začiatku pohybu rýchlosť krúpy ustáli. Napíšte pohybovú rovnicu krúpy v ustálenom stave a vypočítajte veľkosť v_k ustálenej rýchlosti pre krúpu guľového tvaru s polomerom $r = 10$ mm.

b) Je známe, že krúpa môže spôsobiť človeku smrteľné zranenie, ak napr. dopadne kolmo na hlavu človeka s energiou aspoň $E_0 = 80$ J. Určte energiu E krúpy podľa časti a) úlohy. Určte polomer r_m krúpy, ktorá by pri ustálenom pohybe spôsobila človeku smrteľné zranenie.

c) Wikipédia uvádza nasledujúci text: „Najväčšia krúpa bola zaznamenaná 3. septembra 1970 v Spojených štátoch počas krupobitia v Coffeyville v Kansase. Vážila $m_m = 766$ g, najdlhší rozmer bol $l = 15$ cm a po obvode mala $o = 44$ cm. Predpokladaná ustálená rýchlosť pádu sa pohybovala okolo $v_m = 43\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.“

   Predpokladajte, že rekordná krúpa mala tvar rotačného telesa symetrického okolo zvislej osi. Pomocou uvedených údajov vypočítajte odporový koeficient C_t tejto krúpy.

d) Vytvorte numerický model pre pád krúpy podľa časti a) a riešte tento model pomocou počítača, napr. v programe EXCEL. Napíšte základné rovnice modelu pre rýchlosť v a dráhu d pádu krúpy s uvažovaním odporu vzduchu. Pomocou tohto modelu určte, za aký čas t_1 dosiahne krúpa rýchlosť $v_1 = 0{,}99\, v_k$ a dráhu d_1, ktorú krúpa za tento čas prejde. Zostrojte grafy rýchlosti v a dráhy d ako funkcie času.

Zrýchlenie voľného pádu $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, hustota ľadu $\rho_0 = 900\ \mathrm{kg.m^{-3}}$

5. Teplota plynu

Vo zvislom valci s priemerom $d = 10$ cm a pevnou podstavou je uzatvorený vzduch s teplotou $t = 20$ °C piestom zaťaženým závažím. Hmotnosť piestu a závažia je $M = 20$ kg a výška vzduchového stĺpca $h_0 = 30$ cm.

a) Nakreslite náčrtok. Určte hmotnosť m vzduchu uzatvoreného vo valci pod piestom.

Keď vzduch zohrievali, piest dvíhal závažie nahor.

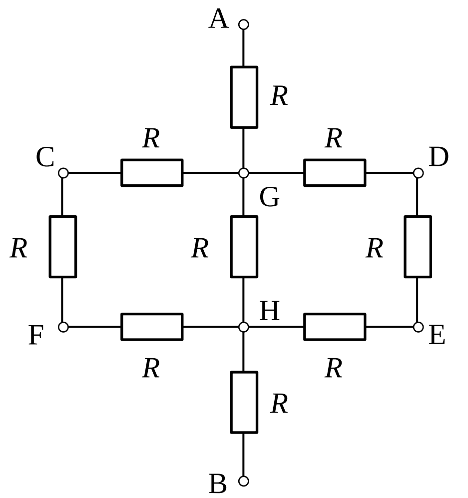
b) Určte teplo Q dodané vzduchu vo valci, ak závažie vo valci sa posunulo o $\Delta h = 10$ cm.

c) Určte účinnosť η dvíhania závažia danú pomerom $\eta = W/Q$, kde W je práca vykonaná vzduchom vo valci.

Atmosférický tlak vzduchu $p_a = 101$ kPa, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, molárna hmotnosť vzduchu $M_m = 29\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$, molárna plynová konštanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$. Vzduch považujte za ideálny plyn dvojatómových molekúl s počtom stupňov voľnosti $s = 5$.

6. Rezistory

Žiaci robili pokusy s elektrickými obvodmi. Z deviatich rezistorov s rovnakými odpormi R zostavili obvod, ktorého schéma je na obrázku C– 2. K dispozícii mali nastaviteľný zdroj jednosmerného napätia, ktorý na displeji ukazoval hodnotu napätia U na výstupných svorkách a hodnotu výkonu P dodávaného zo zdroja do pripojeného obvodu. Ďalej mali k dispozícii voltmeter s veľmi vysokým odporom a ampérmeter s veľmi malým odporom. Zdroj pripájali k rôznym dvojiciam uzlov a voltmetrom a ampérmetrom merali napätia a prúdy. Veličiny najprv merali a potom ich vypočítali. Skúmali, či výsledky merania a výpočtu súhlasia. Vnútorný odpor zdroja neuvažujte.



Obr. C–2

V prvom prípade pripojili zdroj k uzlom A a B. Údaje na zdroji boli $U = 13$ V a $P = 6{,}5$ W.

a) Určte prúd I_1 zdroja, napätie U_1 medzi uzlami G a H a odpor R rezistorov.

V druhom prípade zdroj pripojili medzi uzly C a D a opäť nastavili napätie zdroja $U = 13$ V.

b) Určte napätie U_2 medzi uzlami G a H a prúd I_2 zdroja.

V treťom prípade zdroj pripojili medzi uzly C a E a nastavili napätie zdroja $U = 13$ V.

c) Určte napätie U_3 medzi uzlami G a H a prúd I_3 zdroja.

Vo všetkých prípadoch nakreslite schému zapojenia rezistorov a zdroja, označte v nich uzly, napätia a prúdy.

7. **Určenie ťažiska a momentu zotrvačnosti telesa** – *experimentálna úloha*

Pevné teleso opisuje niekoľko fyzikálnych veličín. Zatiaľ čo určenie hmotnosti je jednoduché, na experimentálne určenie polohy ťažiska a momentu zotrvačnosti sa používajú osobitné metódy. Viete, že pri zavesení telesa sa ťažisko nachádza v zvislom smere pod bodom zavesenia.

Úloha: Určte polohu ťažiska T a moment zotrvačnosti I nepravidelného dvojrozmerného telesa vzhľadom na os kolmú na teleso a prechádzajúcu ťažiskom.

Metóda:

a) Z hrubého papiera alebo plastickej dosky vystrihnite teleso ľubovoľného nepravidelného tvaru. Pomocou presných váh určte hmotnosť m telesa.

b) Do telesa urobte ihlou niekoľko malých dierok (najmenej 5) a dierky očíslujte. Do dierok priviažte niť tak, aby voľné konce nite boli dostatočne dlhé. Potom jeden koniec nite pridržte rukou a druhý koniec nite nechajte voľne visieť (prípadne ho zaťažte malým telieskom, aby bola niť napnutá). Visiaca niť určuje priamku prechádzajúcu ťažiskom. Polohu nite na telese zakreslite priamkou. Experiment opakujte pre všetky dierky a presvedčte sa, že všetky priamky sa pretínajú v jednom bode T – ťažisku. Zmerajte vzdialenosti a_i dierok od ťažiska a hodnoty zapíšte do tabuľky – Tab. 1.

Pozn.: Dierky urobte tak, aby ich vzdialenosti od ťažiska mali rôzne hodnoty (pomer najväčšej a najmenšej vzdialenosti > 3).

c) Do jednotlivých dierok postupne zasuňte tenkú ihlu a upevnite ju do vhodného držiaku tak, aby predstavovala vodorovnú os. Teleso vychýľte z rovnovážnej polohy v rovine telesa a nechajte ho kývať ako fyzikálne kyvadlo v rovine rovnobežnej s povrchom telesa. Čo najpresnejšie zmerajte doby kmitu T_i pre všetky dierky. Hodnoty T_i zapíšte do Tab. 1.

d) Určte hodnoty I_i momentu zotrvačnosti vzhľadom na jednotlivé osi s využitím vzťahu pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I_i}{m\,g\,a_i}}\,,\ \text{kde } g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Hodnoty I_i zapíšte do Tab 1.

e) Podľa Steinerovej vety platí vzťah $I = I_T + m\,a^2$, kde I_T je moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmú na povrch telesa a prechádzajúcu ťažiskom.

Pomocou hodnôt a_i, T_i získaných meraním a výpočtom zostrojte graf I ako funkciu a^2, $I = f(a^2)$,. Overte, či body určené meraním sa nachádzajú približne na priamke, čo potvrdzuje Steinerovu vetu. Bodmi grafu preložte trendovú priamku. Určte smernicu tejto priamky a výsledok porovnajte s hmotnosťou m získanou v časti a) vážením. Pomocou trendovej priamky určte hodnotu I_T.

60. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*

Autori návrhov úloh:	Ivo Čáp 1, 7, Ľubomír Konrád 2, 4, 6, Dušan Nemec 3, Kamil Bystrický 5
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019