59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória E – okresné kolo
Riešenie úloh

1. Poháre s kockami v kvapaline

Riešenie:

a) Kocka v pohári C sa vznáša. Kocka v tomto prípade má rovnakú hustotu ako je hustota kvapaliny, tzn. hustota kocky $\rho = \rho_v = 1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Kocky sú z rovnakého materiálu, teda aj hustota kociek v pohároch A, B sú $\rho = 1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. 2 b

b) Hustota kvapaliny v pohári C (voda), $\rho_C = \rho_v = 1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Vzhľadom na to, že kocka v pohári A klesla na dno, hustota kvapaliny v tomto pohári je menšia ako hustota kocky, a teda, $\rho_A < \rho_C$. V pohári B pláva kocka na voľnej hladine kvapaliny. Kvapalina v pohári B, v ktorej kocka pláva na hladine, je väčšia ako je hustota kocky, a teda vody, $\rho_B > \rho = \rho_C$.

Kvapalina s najväčšou hustotou je v pohári B a s najmenšou hustotou v pohári A.
Výsledok vyjadruje nerovnosť $\rho_A < \rho_C < \rho_B$. 3 b

c) Pre pohár B z Archimedovho zákona máme

$\rho_B\,(26\ \text{cm}^3) = \rho_v\,(27\ \text{cm}^3)$, tzn. $\rho_B = \frac{27}{26}\,\rho_V$,
hustota kvapaliny v pohári B $\rho_B \approx 1{,}038\ \frac{g}{cm^3}$. 2 b

d) Ak sa kocka C vo vode vznáša, je jej hustota rovnaká ako hustota vody. Možno ju teda nahradiť rovnakým objemom vody. Hmotnosť m_C je rovnaká, ako keby bol pohár naplnený až po označenú hladinu iba vodou s hustotou $\rho_C = \rho_v$.

Kocka v pohári B pláva, a teda hmotnosť kocky je rovnaká ako hmotnosť kvapaliny s objemom rovným objemu ponorenej časti kocky. Hmotnosť m_B pohára sa nezmení, ak kocku vyberieme a doplníme kvapalinu až po označenú hladinu. Keďže $\rho_B > \rho_C$, platí i pre hmotnosti pohárov s kvapalinami $m_B > m_C$.
V pohári A je kocka s hustotou ρ_v a zvyšok objemu až po hladinu je vyplnený kvapalinou s hustotou $\rho_A < \rho_v$. Pohár C má celú náplň s hustotu ρ_v. Pre hmotnosti pohárov teda platí $m_A < m_C$.
Pre trojicu pohárov tak máme nerovnosť $m_A < m_C < m_B$. 2 b

e) Z výsledku časti b) je zrejmé, že hustota ρ_A je obmedzená zhora, ale nie zdola. Pri akejkoľvek hustote $\rho_A < \rho_v$ nastane prípad podľa obr. E–1.

Zo zadaných údajov tak nemožno jednoznačne určiť hustotou ρ_A. 1 b

2. Elektrický obvod

Riešenie:

a) Vetvy ACB a ADB sú rovnaké (sústava rezistorov je symetrická vzhľadom na os AB), sú potenciály bodov C a D rovnaké. Prúd medzi uzlami C a D je preto nulový bez ohľadu na to, aký rezistor je pripojený medzi tieto uzly. Či je medzi uzlami C a D vodivé spojenie, rezistor R_2 alebo či sú rozpojené, je výsledok rovnaký.

Odpor medzi uzlami A a B pre všetky prípady (1), (2) a (3) je rovnaký $R_{AB} = R_1$ (vetvy s odporom $2R_1$ spojené paralelne). $R_{AB(1)} = R_{AB(2)} = R_{AB(3)} = 10\ \Omega$. 2 b

b) Zdroj má vnútorný odpor R a sústava rezistorov odpor R_1. Keďže odpor ampérmetra je veľmi malý $R_A \approx 0$, je prúd ampérmetra $I = \frac{U}{R_1+R}$. Odtiaľ určíme vnútorný odpor

$R = \frac{U}{I} - R_1$. Pre dané hodnoty $R = 2{,}0\ \Omega$. 2 b

c) Vzhľadom na symetriu sústavy rezistorov je napätie $U_{CD} = 0$. 1 b

d) Vetvou ACB sústavy rezistorov prechádza polovica prúdu zdroja $\frac{I}{2}$. Medzi uzlami B a C je zapojený rezistor s odporom R_1. Napätie na rezistore $U_{BC} = R_1 \frac{I}{2}$.

Pre dané hodnoty $U_{CB} = 5{,}0$ V. 2 b

e) Výkon zdroja $P = U\,I$. Príkon sústavy rezistorov $P' = U_{AB}\,I = R_1\,I^2$.

Účinnosť zdroja $\eta = \frac{P'}{P} = \frac{R_1 I}{U}$.
Pre dané hodnoty $P = 12$ W, $P' = 10$ W, $\eta \approx 0{,}83$. 3 b

V prípade, že žiak nemá stručné vysvetlenie ani náčrtok, pri správnej hodnote výsledku znižuje sa hodnotenie v každom bode na polovicu.

3. Ochranný štít

Riešenie:

a) Hodnota l_v je na jednotku hmotnosti. Látka s hmotnosťou m predstavuje látkové množstvo n molov, $n = m/M_m$, kde M_m je molárna hmotnosť látky. Počet molekúl je $N = n\,N_A$, kde N_A je Avogadrova konštanta. Väzbová energia, ktorá pripadá na jednu molekulu,

$$E_v = \frac{l_v}{N_1} = \left.\frac{l_v\,M_m}{m\,N_A}\right|_{m=1\,\mathrm{kg}} .$$

Pre dané hodnoty $E_v \approx 6{,}76\times10^{-20}$ J. 3 b

b) Určíme počet častíc N_1 v objeme V_1 keramickej dosky

$$N_1 = n_1\,N_A = \frac{m_1}{M_{mk}}\,N_A = \frac{\rho_k V_1}{M_{mk}}\,N_A .$$

Energia U_1, ktorú by bolo treba dodať, častice navzájom oddelili, tzn. vytvorili ideálny plyn vzájomne neinteragujúcich (neviažúcich sa) častíc

$$U_1 = N_1\,E_{vk} = \frac{\rho_k V_1}{M_{mk}}\,N_A\,E_{vk} .$$

Pre dané hodnoty U_1 = 2,25 kJ. 4 b

c) Kinetická energia strely $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Predané hodnoty $E_k \approx 866$ J.

Objem keramiky potrebný na absorpciu energie strely

$V_k = \frac{V_1}{U_1}E_k$. Pre dané hodnoty $V_k \approx 0{,}39\ \mathrm{cm}^3$. 2 b

Pozn.1: Valček z ocele s hrúbkou h a priemerom d má objem $V_s \approx 0{,}32\ cm^3$. Objem je porovnateľný, ale oceľ sa strelou iba otvorí a odpor voči strele je daný iba jej mechanickou pevnosťou. Keramika svojím „rozprášením“ pohltí oveľa viac energie a preto chráni proti strele účinnejšie.

Pozn.2: V skutočnosti sa keramika nerozpráši až na jednotlivé molekuly ale na prach mikroskopických častíc. Absorbovaná energia je teda menšia ako určená ideálny hodnota. Napriek tomu je ochrana keramickým štítom veľmi účinná. 1 b

4. Kikina doručovacia služba

Riešenie:

a) Obr. RE−1 1 b

Na násadu pôsobia smerom nadol gravitačné sily: násady $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}} = m\boldsymbol{g}$, Jiji $\boldsymbol{F}_{\mathrm{J}} = m_{\mathrm{J}}\,\boldsymbol{g}$, Kiki $\boldsymbol{F}_{\mathrm{K}} = m_{\mathrm{K}}\boldsymbol{g}$ a metly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} = m_{\mathrm{m}}\,\boldsymbol{g}$. V opačnom smere nahor pôsobí sila ťahu vlákna $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} = (\rho_{\mathrm{H}} - \rho_{\mathrm{v}})\,V_0\,\boldsymbol{g}$, (rozdiel gravitačnej sily na pôsobiacej na balón s héliom mínus vztlaková sila vzduchu).

Z podmienky rovnováhy síl máme

$$V_0 = \frac{m_{\mathrm{J}} + m_{\mathrm{K}} + m + m_{\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{v}} - \rho_{\mathrm{H}}}\,.$$

Aby bolo možné udržať násadu vo vodorovnom smere, musí byť nulový výsledný moment síl. Vzhľadom na voľný koniec tyče máme

$$F_{\mathrm{J}}\,d_2 + F_{\mathrm{n}}\,d/2 + F_{\mathrm{K}}(d - d_1) + F_{\mathrm{m}}d = F_{\mathrm{b}}\,x_1\,,$$

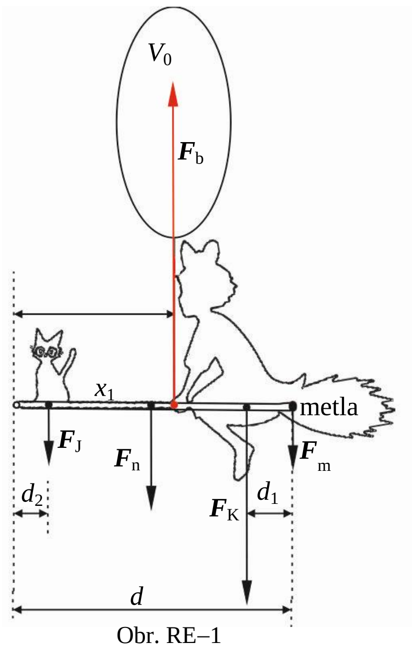
odkiaľ máme

$$x_1 = \frac{m_{\mathrm{J}}\,d_2 + m\,d/2 + m_{\mathrm{K}}(d - d_1) + m_{\mathrm{m}}d}{(\rho_{\mathrm{v}} - \rho_{\mathrm{H}})V_0}$$

a po dosadení za V_0

$$x_1 = \frac{m_{\mathrm{J}}\,d_2 + m\,d/2 + m_{\mathrm{K}}(d - d_1) + m_{\mathrm{m}}d}{m_{\mathrm{J}} + m_{\mathrm{K}} + m + m_{\mathrm{m}}}\,.$$

Pre dané hodnoty $V_0 \approx 28{,}9\ \mathrm{m}^3$, $x_1 \approx 1{,}50$ m. 3 b



Obr. RE−1

b) Obr. RE−2

Pre rovnováhu momentov síl máme

Vznášanie zabezpečujú balóny s celkovým objemom V_0. Rovnováha násady vo vodorovnom smere je daná podmienkou

$$F_{\mathrm{J}}\,d_2 + F_{\mathrm{n}}\frac{d}{2} + F_{\mathrm{K}}(d - d_1) + F_{\mathrm{m}}d = \frac{F_{\mathrm{b}}}{2}(x_2 + d)\,,$$

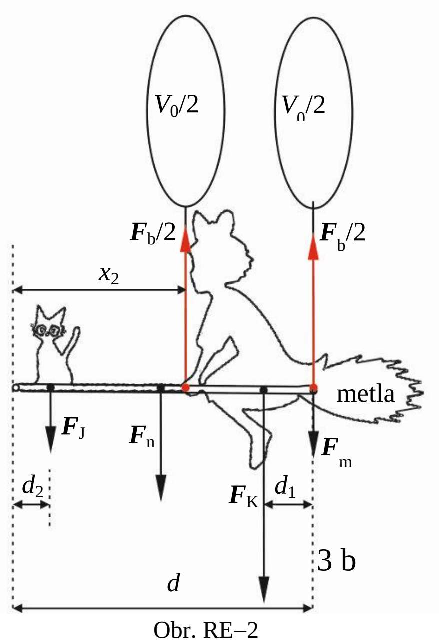
odkiaľ máme

$$x_2 = 2\,\frac{F_{\mathrm{J}}\,d_2 + F_{\mathrm{n}}\frac{d}{2} + F_{\mathrm{K}}(d - d_1) + F_{\mathrm{m}}d}{F_{\mathrm{b}}} - d$$

a po dosadení za F_{b}

$$x_2 = \frac{m_{\mathrm{K}}(d - 2d_1) - m_{\mathrm{J}}(d - 2d_2) + m_{\mathrm{m}}d}{m_{\mathrm{J}} + m_{\mathrm{K}} + m + m_{\mathrm{m}}}\,.$$

Pre dané hodnoty $x_2 \approx 1{,}06$ m. 3 b



Obr. RE−2

c) Obr. RE–3

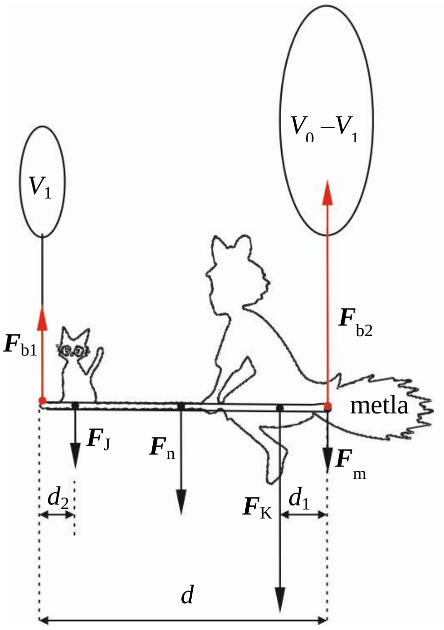
Súčet objemov balónov je V_0, aby sa metla s posádkou vznášala. Podmienka momentovej rovnováhy vzhľadom na koniec násady s metlou

$$F_J\left(d-d_2\right)+F_n\frac{d}{2}+F_K d_1=F_{b1}d\ .$$

Pre $F_{b1} = (\rho_v - \rho_H)\, V_1\, g$ máme

$$V_1=\frac{2m_J\left(d-d_2\right)+md+2m_K d_1}{2d\left(\rho_v-\rho_H\right)}\ .$$

Pre dané hodnoty $V_1 \approx 6{,}77\ \mathrm{m}^3$ (čo predstavuje približne 23 % objemu V_0). 2 b



Obr. RE–3

d) Zmena smeru je spôsobená účinkom výsledného momentu síl pôsobiacich na sústavu v zvislom smere. Podmienka rovnováhy je daná nulovou hodnotou výsledného momentu sily. Ak sa v stave rovnováhy mení uhol násady vzhľadom na vodorovný smer, ramená všetkých síl sa menia v rovnakom pomere, a tak sa podmienka nulového výsledného momentu nezmení. Smer násady v stave rovnováhy pri vznášaní sústavy nie je jednoznačný, a teda pri minimálnej zmene momentu, napr. naklonením dievčaťa dopredu alebo nazad, sa dá uhol násady meniť. Je preto potrebné vodorovný smer stále vyrovnávať.

1 b

59. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy okresného kola kategórie E*

Autori návrhov úloh:	Aba Teleki 1, Daniel Kluvanec 2, 3, Boris Lacsný 4
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Daniel Kluvanec
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018