59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória D – krajské kolo
Riešenie úloh

1. Let guľôčky

Riešenie:

Trajektórie guľôčky na obrázku zodpovedajú najmenšej rýchlosti v_{01} a najväčšej rýchlosti v_{02}, pri ktorých loptička preletí otvorom. Hľadaná rýchlosť teda leží v intervale $v_{01} < v_0 < v_{02}$.
Pravouhlú sústavu súradníc zvolíme tak, že os x leží v rovine podlahy a os y prechádza zvislou hranou stola. Začiatočné súradnice guľôčky sú $[0; h]$. Pre polohu v čase t prechodu guľôčky otvorom vo zvislej stene máme súradnice $[x_0; y]$

$$x_0 = v_0 t\,, \qquad y = h - \frac{1}{2} g t^2\,. \qquad \text{2 b}$$

Z prvého vzťahu vyjadríme čas pohybu

$$t = \frac{x_0}{v_0}\,. \qquad \text{1 b}$$

a dosadíme ho do druhého vzťahu. Po úprave dostávame začiatočnú rýchlosť

$$v_0 = x_0 \sqrt{\frac{g}{2(h-y)}}\,. \qquad \text{1 b}$$

Pre výšky okrajov otvoru máme

$$v_{01} = x_0 \sqrt{\frac{g}{2(h-y_1)}} \qquad \text{2 b}$$

a $$v_{02} = x_0 \sqrt{\frac{g}{2(h-y_2)}}\,. \qquad \text{2 b}$$

Interval rýchlostí $v_{01} < v_0 < v_{02}$, pre dané hodnoty $1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} < v_0 < 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 2 b

2. Zrážka guľôčok

Riešenie:

Pre zrážku guľôčok, ako izolovanú sústavu, platí zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania energie

$$m_B v_0 = m_A v_1 + m_B v_2\,, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_B v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_1^2 + \frac{1}{2} m_B v_2^2\,, \qquad (2) \qquad \text{2 b}$$

kde v_1 a v_2 sú veľkosti rýchlosti guľôčok A a B v okamihu po zrážke, hmotnosti m_A, m_B guľôčok A, B sú $m_B = 2\, m_A = 2\, m$.
Zo sústavy rovníc (1), (2) vylúčime rýchlosť v_2 guľôčky B po zrážke a určíme rýchlosť v_1

$$v_1 = v_0 \frac{2 m_B}{m_B + m_A} = \frac{4}{3} v_0\,. \qquad \text{2 b}$$

Ak po zrážke rozdiel zotrvačnej (odstredivej) sily a priemetu tiažovej sily do smeru nite je kladný (niť sa napína), guľôčka A sa pohybuje na napnutej niti po kružnicovej trajektórii. Ak má guľôčka prejsť najvyšším bodom kružnice, musí byť splnená podmienka napnutia nite i v najvyššom bode

$$m\,\frac{v_3^2}{l} \geq m\,g\,, \qquad 2\text{ b}$$

kde v_3 je rýchlosť guľôčky v najvyššom bode.
Pri pohybe nahor v tiažovom poli Zeme dochádza k premene kinetickej energie guľôčky A na potenciálnu, takže pre začiatočnú (najnižšiu) polohu a najvyšší bod trajektórie vo výške $2l$ platí

$$\frac{1}{2}m\,v_1^2 = \frac{1}{2}m\,v_3^2 + m\,g\,2l\,. \qquad 2\text{ b}$$

Ak dosadíme podmienku (2) a výsledok (1), dostávame podmienku pre rýchlosť v_0

$$v_0 \geq \frac{3}{4}\sqrt{5\,g\,l} = v_{0\mathrm{m}}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $v_{0\mathrm{m}} \approx 5{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. 1 b

3. Plávajúca guľa

Riešenie:

a) Hustota gule $\rho_\mathrm{d} = \dfrac{m_1}{V} = \dfrac{3\,m_1}{4\pi\,R^3}$. Pre dané hodnoty veličín $\rho_\mathrm{d} \approx 677\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. 2 b

b) Hustota upravenej gule $\rho_\mathrm{g} = \dfrac{m_2}{V} = \dfrac{3\,m_2}{4\pi\,R^3}$. Pre dané hodnoty veličín $\rho_\mathrm{g} \approx 943\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Keďže $\rho_\mathrm{g} < \rho_\mathrm{v}$, guľa bude vo vode plávať.
Podľa Archimedovho zákona tiaž plávajúceho telesa je rovná tiaži kvapaliny s objemom rovným objemu ponorenej časti telesa, teda

$$\rho_\mathrm{g}\left(V_1 + V_2\right)g = \rho_\mathrm{v}\,V_1\,g\,,\ \text{odkiaľ máme}\ p = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{g}} - 1\,. \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané a vypočítané hodnoty veličín $p \approx 0{,}060 = 6{,}0\ \%$. 1 b

c) Hmotnosť gule s olovom $m_2 = \left(V - V_\mathrm{o}\right)\rho_\mathrm{d} + V_\mathrm{o}\,\rho_\mathrm{o}$, odkiaľ máme

$$m_\mathrm{o} = \frac{\rho_\mathrm{g} - \rho_\mathrm{d}}{\rho_\mathrm{o} - \rho_\mathrm{d}}\,\rho_\mathrm{o}\,V = \frac{4}{3}\pi R^3\,\rho_\mathrm{o}\,\frac{\rho_\mathrm{g} - \rho_\mathrm{d}}{\rho_\mathrm{o} - \rho_\mathrm{d}}\,. \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané a vypočítané hodnoty veličín $m_\mathrm{o} \approx 16{,}4$ g. 1 b

d) Pre plávajúcu guľu je hmotnosť vody vytlačenej ponorenou časťou gule rovná hmotnosti gule. Vytlačený objem $V_1 = m_2/\rho_\mathrm{g}$. Guľu tak môžeme nahradiť vodou s objemom V_1, čo znamená zvýšenie výšky hladiny $\Delta h = \dfrac{V_1}{S} = \dfrac{m_2}{\rho_\mathrm{g}\,S}$. 1 b

Pre dané hodnoty $\Delta h \approx 16{,}5$ mm. 1 b

4. Rebrík pri stene

Riešenie:

a) Obr. RD–1.

Tiažová sila $\boldsymbol{F}_{g1} = M\boldsymbol{g}$ pôsobí v ťažisku rebríka v polovici jeho dĺžky.

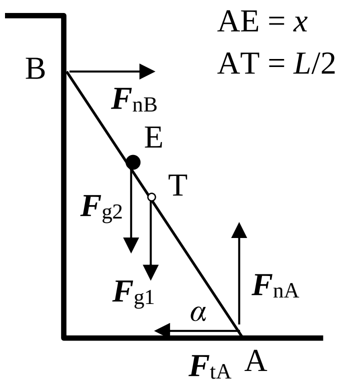
Tiažová sila elektrikára $\boldsymbol{F}_{g2} = m\boldsymbol{g}$ pôsobí v bode E.

V bode A rebríka pôsobí zvislá tlaková sila $\boldsymbol{F}_{nA}$ a vodorovná sila trenia $\boldsymbol{F}_{tA}$ v k stene.

V bode B tyče pôsobí vodorovná tlaková sila $\boldsymbol{F}_{nB}$ steny.

1 b

Pozn.: Sila trenia $\boldsymbol{F}_{tB}$ medzi rebríkom a stenou je nulová.



Obr. RD–1

Ak sa rebrík nešmýka, platia podmienky statickej rovnováhy. Výslednica vodorovných zložiek síl pôsobiacich na rebrík, ako aj výslednica zvislých zložiek síl je nulová, výslednica momentov síl pôsobiacich na rebrík vzhľadom na ľubovoľnú os otáčania kolmú na rovinu nákresu je nulová.

$$F_{nB} - F_{tA} = 0, \qquad (1)$$

$$F_{g2} + F_{g1} - F_{nA} = 0, \qquad (2)$$

$$F_{g1}\frac{L}{2}\cos\alpha + F_{g2}\,x\cos\alpha - F_{nB}\,L\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

vzhľadom na bod A. spolu 2 b

Ak sa rebrík nemá zošmyknúť, trenie v bode A je statické, pre ktoré platí

$$F_{tA} \leq f\,F_{nA}. \qquad (4)$$

1 b

Z rovníc (1) a (3) určíme silu trenia

$$F_{tA} = \left(F_{g1}\frac{1}{2} + F_{g2}\frac{x}{L}\right)\frac{1}{\tan\alpha}.$$

Silu F_{nA} určíme z (2) a dosadíme do podmienky (4) pre statické trenie

$$\left(F_{g1}\frac{1}{2} + F_{g2}\frac{x}{L}\right)\frac{1}{\tan\alpha} \leq f\left(F_{g1} + F_{g2}\right),$$

resp.
$$\left(\frac{M}{2} + m\frac{x}{L}\right)\frac{1}{\tan\alpha} \leq f\left(M + m\right). \qquad (5)$$

1 b

a) V prvom prípade je rebrík bez elektrikára, tzn. $m = 0$. Z podmienky statickej rovnováhy (5) určíme podmienku pre uhol α

$$\tan\alpha \geq \frac{1}{2f} = \tan\alpha_1,$$ kde α_1 je medzný uhol sklonu rebríka.

Pre dané hodnoty $\alpha \geq \alpha_1 \approx 73°$. 1 b

b) V druhom prípade elektrikár stúpa po rebríku. Podmienku (5) statickej rovnováhy upravíme na tvar

$$\frac{x}{L} \le f\left(\frac{M}{m}+1\right)\tan\alpha - \frac{M}{2m}. \qquad (6) \qquad 1\text{ b}$$

Ak má elektrikár vystúpiť až na vrchol rebríka, tzn. $x = L$, máme

$$\tan\alpha \ge \frac{1}{2f}\frac{M+2m}{M+m} = \tan\alpha_{\mathrm{m}}.$$

Pre dané hodnoty $\alpha_{\mathrm{m}} \approx 81°$.

d) Pre dané a a dĺžku rebríka L je uhol sklonu $\alpha_2 = \arccos\left(\frac{a}{L}\right)$.

Pre dané hodnoty $\alpha_2 \approx 78{,}5°$.
Keďže $\alpha_2 > \alpha_1$, rebrík nespadne.
Z podmienky (5) dostávame pre vzdialenosť x_{m} podmienku

$$x_{\mathrm{m}} = f\left(\frac{M}{m}+1\right)L\tan\alpha_2 - \frac{M}{2m}L. \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $x_{\mathrm{m}} \approx 5{,}5$ m.
Ak vystúpi vyššie ($x > x_{\mathrm{m}} \approx 5{,}5$ m), rebrík sa s ním zošmykne.

59. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autor návrhov úloh:	Ľubomír Konrád
Spracovanie návrhov úloh a riešení:	Ivo Čáp
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomér Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018