59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória B – krajské kolo
Riešenie úloh

1. Termodynamický dej

Riešenie:

a) Prvý dej je izotermický pri teplote T_1.

Objem $V_B = V_A \dfrac{p_A}{p_B} = \dfrac{V_1}{2}$, $p_B = 2\,p_1$, $T_B = T_1$.

Pre dané hodnoty: $V_B = 1{,}0\ \mathrm{dm^3}$, $p_B = 200\ \mathrm{kPa}$, $T_B = 300\ \mathrm{K}$. 0,5 b

Druhý dej je izobarický so zmenou teploty z hodnoty T_1 na hodnotu T_2.

$V_C = V_B \dfrac{T_C}{T_B} = \dfrac{V_1}{2}\dfrac{T_2}{T_1}$, $p_C = 2p_1$, $T_C = T_2$.

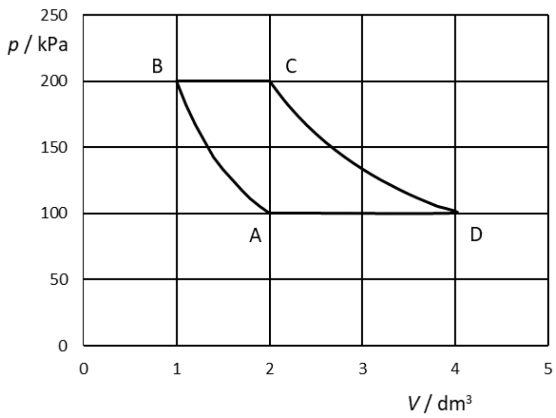
Pre dané hodnoty: $V_C = 2{,}0\ \mathrm{dm^3}$, $p_C = 200\ \mathrm{kPa}$, $T_C = 600\ \mathrm{K}$. 0,5 b

Tretí dej je izotermické rozpínanie z tlaku p_C na p_1

$V_D = V_C \dfrac{p_C}{p_D} = \dfrac{V_1}{2}\dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{p_2}{p_1} = V_1 \dfrac{T_2}{T_1}$, $p_D = p_1$, $T_D = T_2$.

Pre dané hodnoty: $V_D = 4{,}0\ \mathrm{dm^3}$, $p_D = 100\ \mathrm{kPa}$, $T_D = 600\ \mathrm{K}$. 1 b

Obr. RB–1 1 b



b) Pri izotermickom stláčaní sa vnútorná energia nemení, ale uvoľňuje teplo a sústavu treba chladiť. Pri izobarickej expanzii rastie teplota v dôsledku dodávania tepla, pričom plyn koná prácu. Sústavu treba zohrievať. Pri izotermickej expanzii plyn koná prácu, vnútorná energia sa nemení, preto sústave treba dodávať teplo. Pri izobarickom stláčaní koná prácu vonkajšia sila a teplota klesá, preto sústavu treba chladiť.

Zohrievanie plynu pri dejoch B–C a C–D, chladenie pri dejoch A–B a D–A. 1 b

Celková práca pri pravotočivom obiehaní cyklu $W > 0$, tzn. sústava čerpá teplo z ohrievača a koná prácu – predstavuje tepelný motor. 1 b

c) Teplo dodané pri deji B–C

$$Q_{BC} = W_{BC} + \Delta U = p_2\left(V_C - V_B\right) + C_V\left(T_2 - T_1\right) = \left(1+\frac{s}{2}\right)p_1V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Teplo dodané počas deja C–D

$$Q_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_C}^{V_D} \frac{p_C V_C}{V}\,\mathrm{d}V = p_C V_C \ln\frac{V_D}{V_C} = p_1 V_1 \frac{T_2}{T_1}\ln 2\,.$$

Celkové dodané teplo $Q_1 = Q_{BC} + Q_{CD}$

$$Q_1 = p_1V_1\left[\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \frac{T_2}{T_1}\ln 2\right].$$

Pre dané hodnoty $Q_1 \approx 977$ J. 2 b

Práca počas dejov

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_A}^{V_B} \frac{p_1 V_1}{V}\,\mathrm{d}V = p_1 V_1 \ln\frac{V_B}{V_A} = -\,p_1 V_1 \ln 2\,.$$

$$W_{BC} = p_B\left(V_C - V_B\right) = p_1 V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Analogicky

$$W_{CD} = p_C V_C \ln\frac{V_D}{V_C} = p_1 V_1 \frac{T_2}{T_1}\ln 2\,,$$

$$W_{DA} = p_D\left(V_A - V_D\right) = -\,p_1 V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Celková práca $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

$$W = p_1 V_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\ln 2 \;>\; 0\,.$$

Pre dané hodnoty $W \approx 139$ J. 2 b

Pomer $\eta = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{\left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right)\ln 2}{\left(1+\dfrac{s}{2}\right)\left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right) + \dfrac{T_2}{T_1}\ln 2}$, pre dané hodnoty $\eta \approx 0{,}14$. 1 b

2. Rezonančná absorpcia

Riešenie:

a) Prúd zdroja

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U}}{R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\boldsymbol{U}}{R + \mathrm{j}\omega\left(L - \dfrac{1}{\omega^2 C}\right)} . \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Nulový fázový rozdiel zodpovedá nulovej imaginárnej zložke menovateľa

$L - \dfrac{1}{\omega^2 C} = 0$ a odtiaľ máme rezonančnú uhlovú frekvenciu

$\omega_\mathrm{r} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, resp. $f_\mathrm{r} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pre dané hodnoty veličín $\omega_r \approx 632\times10^3\ \mathrm{s}^{-1}$, $f_\mathrm{r} \approx 100{,}6$ kHz. 1 b

Prúd I_r v stave rezonancie a napätie na kapacitore U_Cr sú vyjadrené vzťahmi

$I_\mathrm{r} = \dfrac{U}{R}$ a $U_\mathrm{Cr} = I_\mathrm{r}\dfrac{1}{\omega_\mathrm{r} C} = U\dfrac{1}{\omega_\mathrm{r} C R}$. 1 b

Pre dané hodnoty veličín $I_\mathrm{r} \approx 0{,}80$ A, $U_\mathrm{Cr} \approx 1{,}26$ kV.

Faktor kvality

$$Q = \frac{U_\mathrm{Cr}}{U} = \frac{1}{\omega_\mathrm{r} C R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Pre dané hodnoty veličín $Q \approx 105$. 1 b

b) Činný výkon sa spotrebuje iba na rezistore, $P = R I^2$. S použitím (1) máme

$$P = R\frac{U^2}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{P_\mathrm{r}}{1 + \dfrac{1}{R^2}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} , \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

kde $P_\mathrm{r} = U^2/R$, $P_\mathrm{r} \approx 9{,}6$ W je činný výkon v stave rezonancie. Zo vzťahu (2) vidíme, že funkcia $P(\omega)$ má v stave rezonancie maximum a pri znižovaní i pri zvyšovaní frekvencie klesá k nule.

c) Výkon sa zníži na polovičnú hodnotu, ak platí

$\dfrac{1}{R^2}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2 = 1$, resp. po odmocnení $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = \pm R$.

Rovnicu upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$\omega^2 CL \pm \omega CR - 1 = 0$, ktorá má riešenie $\omega_{1,2} = \dfrac{\pm CR \pm \sqrt{(CR)^2 + 4CL}}{2CL}$.

Iba dve kombinácie znamienok nám dajú kladné hodnoty frekvencie, a to

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{-CR+\sqrt{(CR)^2+4CL}}{2CL}, \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{+CR+\sqrt{(CR)^2+4CL}}{2CL}. \qquad 1\ \text{b}$$

Pre dané hodnoty $f_1 \approx 100{,}2$ kHz, $f_2 \approx 101{,}2$ kHz. 1 b

Šírka absorpčného pásma

$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L}$. Pre dané hodnoty $\Delta f = 955$ Hz. 1 b

d) Šírka absorpčného pásma rezonátora hodiniek

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L} = f_r \frac{R}{2\pi f_r L} = \frac{f_r}{Q_1},$$

odkiaľ relatívna šírka pásma $\frac{\Delta f}{f_r} = \frac{1}{Q_1}$. 1 b

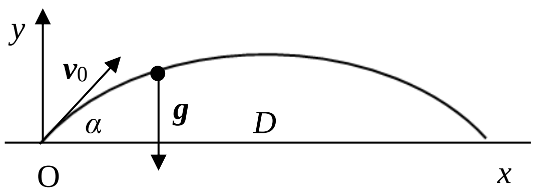
Ak je chod hodín riadený oscilátorom, je relatívna odchýlka meraného času rovná relatívnej odchýlke frekvencie oscilátora

$\Delta t = t\frac{\Delta f_r}{f_r} = \frac{t}{Q_1}$. Pre dané hodnoty $\Delta t \approx 0{,}26$ s za mesiac. 1 b

3. Hra s loptou

Riešenie:

a) Obr. RB−2 1 b



Obr. RB−2

Vo vodorovnom smere pôsobí na loptu nulová sila, preto je pohyb rovnomerný so začiatočnou rýchlosťou $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$$x = v_0 t \cos\alpha\,. \qquad (1)$$

V zvislom smere pôsobí konštantná tiažová sila smerom nadol, ktorá lopte udeľuje konštantné zrýchlenie $a_y = -g$. Pohyb je preto rovnomerne zrýchlený so začiatočnou rýchlosťou $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,. \qquad (2)$$

Zo vzťahov (1) a (2) vylúčime čas t a po úprave dostávame rovnicu trajektórie šikmého vrhu

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha\,, \qquad (3) \qquad 2\ \text{b}$$

čo je rovnica paraboly.

Pozn.: Rovnicu možno upraviť na základný tvar

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = -k\,(x-a)^2 + b\,.$$

b) Dopad lopty na vodorovnú rovinu ihriska je daný súradnicami bodu dopadu x_D, $y_D = 0$. Po dosadení do rovnice (3) dostávame výsledok

$$x_D = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

Maximálny dolet $x_D = D$ je pre $\sin 2\alpha = 1$, tzn. $\alpha = 45°$

$$D = \frac{v_{01}^2}{g}\text{, odkiaľ máme } v_{01} = \sqrt{g\,D}\,. \qquad (4) \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané hodnoty veličín $v_{01} \approx 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

c) Pre bod trajektórie v mieste žľabu má súradnice $x_2 = d$, $y_2 = h$. Po dosadení do rovnice trajektórie (3) máme

$$h = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}d^2 + d\tan\alpha\,.$$

Ak má chlapec zasiahnuť žľab, musí byť táto rovnica splnená. To môžeme zistiť rôznymi spôsobmi. Jeden z nich vychádza z toho, že ide o kvadratickú rovnicu pre d, ktorú možno napísať v tvare

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}d^2 - d\tan\alpha + h = 0, \quad \text{pozn.: } a\,d^2 + b\,d + c = 0\,.$$

Jej riešenie je

$$d_{1,2} = \frac{\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha - 4\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}h}}{2\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}}, \quad \text{pozn.: } d_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Aby mala rovnica reálne riešenie, musí byť diskriminant nezáporný

$$\tan^2\alpha - 4\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}h \ \geq\ 0\,. \qquad (5)$$

Ak dosadíme rýchlosť v_{01} zo vzťahu (4) dostávame pre chlapca podmienku

$\sin\alpha \geq \sqrt{\dfrac{2h}{D}}$. Pre dané hodnoty veličín $\sqrt{\dfrac{2h}{D}}$ = 1,04.

Podmienku nemôže chlapec splniť, a preto nemôže vykopnúť loptu do žľabu, aj keď využije maximálnu rýchlosť výkopu.. 3 b

d) Z podmienky nezáporného diskriminantu vyjadríme podmienku pre začiatočnú rýchlosť

$$v_0^2 \;\geq\; \frac{2\,g\,h}{\sin^2\alpha} = 2\,g\,h\left(\frac{\sqrt{d^2+h^2}}{h}\right)^2 = v_{02}^2\,,$$

kde $\quad v_{02} = \sqrt{2\,g\,h\left(1+\dfrac{d^2}{h^2}\right)}$

je minimálna začiatočná rýchlosť potrebná na to, aby lopta spadla do žľabu.

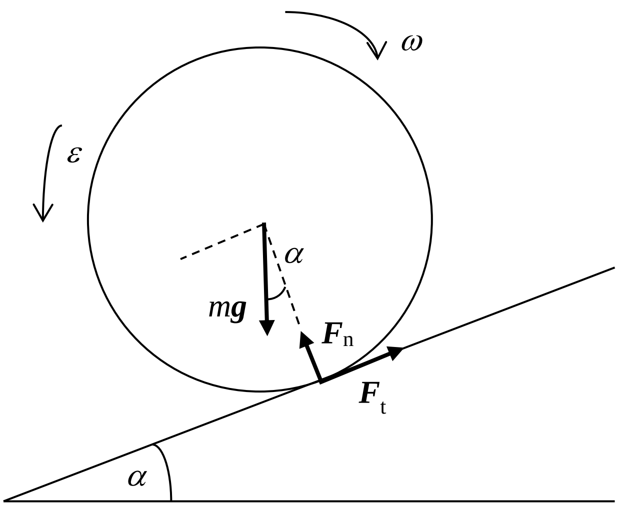
Pre dané hodnoty veličín $v_{02} \approx 15{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 2 b

Chlapec vykopne loptu do žľabu.

4. Pohyb obruče po naklonenej rovine

Riešenie:

a) Na obr. RB–3 sú označené tri sily pôsobiace na obruč: gravitačná sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\,g$ s pôsobiskom v ťažisku obruče a tlaková sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ dosky na obruč a $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ sila trenia, ktorá pôsobí proti smeru relatívneho pohybu obruče a dosky.



Obr. RB–3

Keďže na začiatku je obruč roztočená, po priložení na dosku začne pôsobiť smerom nahor sila šmykového trenia $F_\mathrm{t} = f\,m\,g\cos\alpha$.
Obruč stúpa, ak platí $F_\mathrm{t} > F_\mathrm{g}\sin\alpha$.
Rýchlosť v ťažiska v smere naklonenej roviny postupne narastá a uhlová rýchlosť ω obruče klesá. V okamihu, v ktorom je splnená podmienka $v = \omega R$, prejde pohyb obruče do valivého pohybu bez prešmykovania. Obruč potom valivým pohybom pokračuje až do bodu naklonenej roviny, v ktorom rýchlosť ťažiska je nulová.
Z najvyššieho bodu sa potom obruč valivým pohybom kotúľa nadol. 2 b

b) Na začiatku sa obruč musí prešmykovať, keďže rýchlosť postupného pohybu ťažiska obruče $v = 0$ a uhlová rýchlosť $\omega > 0$.
Zrýchlenie pohybu ťažiska obruče smerom nahor podľa 2. pohybového zákona

$$a = \frac{1}{m}\left(F_\mathrm{t} - F_\mathrm{g}\sin\alpha\right) = f\,g\cos\alpha - g\sin\alpha = g\cos\alpha\,\left(f - \tan\alpha\right) > 0\,.$$

Pre uhol α sklonu dosky dostávame podmienku

$$\alpha < \arctan\,f = \alpha_1\,. \qquad (1)$$

Pre dané hodnoty $\alpha_1 \approx 11{,}3°$. 1 b

Pre uhol sklonu α = 8,5° je splnená podmienka pohybu obruče hore po povrchu dosky.

Valivý pohyb je daný podmienkou rovnosti rýchlosti v postupného pohybu a obvodovej rýchlosti ωR obruče, resp. rovnosti zrýchlenia a postupného pohybu a obvodového zrýchlenia εR, kde ε je uhlové zrýchlenie. Trenie F_t je v tomto prípade statické, ktoré je dané iba nerovnosťou $F_t < f F_n$.

$$a = \frac{1}{m}\left(F_t - F_g \sin\alpha\right),$$

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = -\frac{F_t R}{I} = -\frac{F_t R}{mR^2}.$$

Zo vzťahu $a = R\,\varepsilon$ po dosadení za vzťahy pre zrýchlenia určíme silu trenia

$$F_t = \frac{1}{2} F_g \sin\alpha < f\, F_n = f\, F_g \cos\alpha, \text{ odkiaľ máme } \tan\alpha < 2f. \qquad (2) \qquad 0{,}5 \text{ b}$$

Z výsledku je zrejmé, že ak je splnená prvá podmienka (1) $\alpha < \alpha_1$, je splnená i podmienka (2) pre možnosť valivého pohybu. Valivý pohyb vzniká od okamihu splnenia podmienky $a = R\,\varepsilon$. 0,5 b

c) V prvej časti pohybu s prešmykovaním rýchlosť v rastie a uhlová rýchlosť ω klesá od začiatočnej hodnoty podľa vzťahov

$$v = a\,t = g\cos\alpha\left(f - \tan\alpha\right)t$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \omega_0 - \frac{F_t R}{I} t = \omega_0 - \frac{f\,g\cos\alpha}{R} t.$$

Prešmykovanie sa skončí po dosiahnutí podmienky valivého pohybu $v = \omega R$. Odtiaľ určíme čas

$$t_1 = \frac{R\omega_0}{g\cos\alpha\left(2f - \tan\alpha\right)}.$$ Pre dané hodnoty $t_1 \approx 5{,}2$ s. 1 b

Za čas t_1 prejde ťažisko obruče dráhu $l_1 = \frac{1}{2}\,a\,t_1^2$ a prekoná tak výšku $h_1 = l_1 \sin\alpha$. Po dosadení za zrýchlenie a a čas t_1 máme

$$h_1 = \frac{R^2}{2g}\,\frac{\tan\alpha\left(f - \tan\alpha\right)}{\left(2f - \tan\alpha\right)^2}\,\omega_0^2.$$

Pre dané hodnoty $h_1 \approx 96$ cm. (*Pozn.:* $l_1 \approx 6{,}49$ m) 1 b

d) Za dobu t_1 získa ťažisko rýchlosť v_1 a obruč uhlovú rýchlosť $\omega_1 = v_1/R$, kde

$$v_1 = a\,t_1 = R\omega_0\,\frac{f - \tan\alpha}{2f - \tan\alpha}.$$ Pre dané hodnoty $v_1 \approx 2{,}52\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Pri valivom pohybe nedochádza k stratám mechanickej energie a možno použiť zákon zachovania mechanickej energie, podľa ktorého kinetická energia obruče sa premení na potenciálnu energiu v bode zastavenia

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = m g \Delta h.$$

Po dosadení máme

$$\Delta h = \frac{1}{2g}\left(v_1^2 + \frac{I}{m}\omega_1^2\right) = \frac{1}{2g}\left(v_1^2 + R^2\omega_1^2\right) = \frac{v_1^2}{g} = \frac{R^2\omega_0^2}{g}\left(\frac{f - \tan\alpha}{2f - \tan\alpha}\right)^2.$$

Pre dané hodnoty Δh = 65 cm.

Maximálna výška $h_m = h_1 + \Delta h \approx 160$ cm. 2 b

e) V najvyššom bode sa obruč zastaví $v = 0$, $\omega = 0$. Keďže je splnená podmienka pre valivý pohyb, obruč sa vracia nadol valivým pohybom, pri ktorom nedochádza k stratám mechanickej energie. Pokles potenciálnej energie je rovný kinetickej energii

$$m g h_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 = m R^2 \omega_2^2,$$

odkiaľ máme

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{g h_{\mathrm{m}}}}{R}.$$ Pre dané hodnoty $\omega_2 \approx 16$ rad·s^{-1}. 1 b

Nižšia hodnota $\omega_2 < \omega_0$ má dve príčiny:

- časť pôvodnej mechanickej (kinetickej) energie rotujúcej obruč sa v dôsledku šmykového trenia premení na teplo
- po návrate do začiatočnej polohy je iba polovica mechanickej energie rovná energii rotačného pohybu (druhá polovica je energia postupného pohybu) 1 b

59. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*

Autor návrhov úloh:	Ivo Čáp (1, 2), Ľubomír Konrád (3, 4)
Spracovanie návrhov úloh a riešení:	Ivo Čáp
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018