59. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2017/2018
Kategória C – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Kúsok ľadu na lomenej streche

a) Prvá časť pohybu medzi bodmi A, je kĺzanie s trením po naklonenej rovine s uhlom sklonu α. V smere pohybu pôsobí zložka tiažovej sily $F_g \sin\alpha$ a proti pohybu sila trenia $f F_g \cos\alpha$.

Teliesko nadobudne kinetickú energiu rovnú práci výslednice týchto síl

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = (m g \sin\alpha - f\, m g \cos\alpha) L .$$

V bode B má ľad rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{2 g L (\sin\alpha - f \cos\alpha)} . \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $v_0 \approx 2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. 1 b

b) Ďalšia časť pohybu je šikmý vrh nadol so začiatočnou rýchlosťou v_0 a uhlom α.

Pre súradnice vzhľadom na bod B máme

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha + \frac{1}{2} g t^2 .$$

Pre súradnice bodu C dopadu platí rovnica priamky

$$y_C = x_C \tan\beta .$$

Po dosadení času letu τ a súradníc bodu dopadu máme

$$x_C = v_0 \tau \cos\alpha$$

$$y_C = x_C \tan\beta = v_0 \tau \sin\alpha + \frac{1}{2} g \tau^2 ,$$

odkiaľ dostávame rovnicu

$$\left[\frac{1}{2} g \tau - v_0 (\cos\alpha \tan\beta - \sin\alpha)\right] \tau = 0 ,$$

ktorá má dve riešenia: $\tau = 0$ s (bod B) a

$$\tau = \frac{2 v_0}{g} (\cos\alpha \tan\beta - \sin\alpha) = 2 \cos\alpha (\tan\beta - \tan\alpha) \sqrt{\frac{2L}{g} (\sin\alpha - f \cos\alpha)} . \qquad 3\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $\tau \approx 0{,}40$ s. 1 b

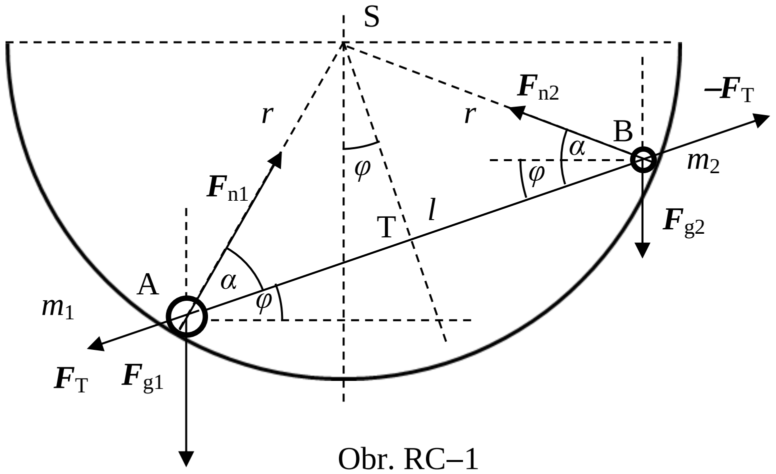
c) Vzdialenosť $d = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$. Po dosadení máme

$$d = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \tau \sqrt{v_0^2 + g v_0 \tau \sin\alpha + \frac{1}{4} g^2 \tau^2} . \qquad 2\text{ b}$$

Pre dané a vypočítané hodnoty $d \approx 1{,}4$ m. 1 b

2. Rovnovážna poloha dvojice guľôčok v miske

a) Obr. RC–1 a správny opis síl 2 b



Obr. RC–1

Vektory síl pôsobiacich na guľôčky sú označené v obr. RC–1. Na guľôčky pôsobia zvislo nadol tiažové sily $\boldsymbol{F}_{g1}$, $\boldsymbol{F}_{g2}$, tlakové sily $\boldsymbol{F}_{n1}$, $\boldsymbol{F}_{n2}$ povrchu misky smerujú do stredu S krivosti misky, tlakové sily tyčky $\boldsymbol{F}_T$, $-\boldsymbol{F}_T$ v smere tyčky. Hmotnosť, resp. tiaž tyčky, ako vyplýva z textu úlohy, neuvažujeme.

b) V stave rovnováhy (v pokoji) je výslednica síl a výslednica momentov síl pôsobiacich na sústavu nulová.

Rovnica rovnováhy síl

$$\boldsymbol{F}_{g1} + \boldsymbol{F}_{g2} + \boldsymbol{F}_{n1} + \boldsymbol{F}_{n2} + \boldsymbol{F}_T + (-\boldsymbol{F}_T) = 0 \qquad (1)$$ 1 b

a rovnica rovnováhy momentov v síl vzhľadom na stred otáčania S misky

$$F_{g1}\, r \cos(\alpha + \varphi) - F_{g2}\, r \cos(\alpha - \varphi) = 0\,. \qquad (2)$$ 1 b

Momenty zvyšných síl sú nulové.
Uhol α je daný geometrickými rozmermi v rovnoramennom trojuholníku SAB

$$l = 2\, r \cos\alpha \text{ , resp. } \cos\alpha = \frac{l}{2\, r}\,.$$

c) V rovnici (2) vyjadríme kosínusové funkcie súčtových a rozdielových uhlov

$$m_1 \left(\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi\right) - m_2 \left(\cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi\right) = 0\,,$$

odkiaľ dostávame

$$\tan\varphi = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{\frac{l}{2r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{l}{\sqrt{4r^2 - l^2}}\,.$$ 2 b

Pre dané hodnoty $\tan\varphi \approx 0{,}16$; $\varphi \approx 9{,}1°$. 1 b

Výslednica momentov síl vzhľadom na bod S, ktoré pôsobia na guľôčku A,

$$F_{g1}\, r \cos(\alpha+\varphi) - F_T\, r \sin\alpha = 0\,.$$

Rovnicu upravíme napr. na tvar

$$F_T = m_1\, g\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\varphi - \sin\varphi\right) = m_1\, g\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} - \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\right) =$$

$$= m_1\, g\,\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\left(\frac{l}{\sqrt{4r^2-l^2}} - \tan\varphi\right) = \frac{l\, m_1\, m_2}{\sqrt{r^2(m_1+m_2)^2 - l^2\, m_1\, m_2}}\, g\,.$$

2 b

Pre dané hodnoty $F_T \approx 0{,}19$ N. 1 b

3. Pneumatické ovládanie piesta

a) Ak sa piest posúva v označenom smere, tlak p vzduchu klesá a vzduch má tendenciu sa ochladzovať.

Ak je pohyb piestu (1) veľmi pomalý, stačí sa prestupom tepla cez steny rúrky vyrovnávať teplota vzduchu v rúrke s teplotou okolia – dej bude izotermický.
Ak pohyb piestu (2) veľmi rýchly, je prestup tepla stenami valca veľmi malý a možno ho zanedbať – dej bez výmeny tepla je adiabatický. 2 b

b) V prvom prípade ide o izotermický dej, pre ktorý platí

$$p_0\, S\, l_0 = p\, S\,(l_0 + x - y). \qquad (1)$$

Rovnováha piestu A je daná rovnosťou sily ťahu pružiny a rozdielu tlakových síl na piest A

$$S\,(p_0 - p) = k\, y\,. \qquad (2)$$

Z týchto rovníc vylúčime tlak p a získame hľadanú funkciu

$$x = y + \left[\left(1 - \frac{k}{S\, p_0}\, y\right)^{-1} - 1\right] l_0 = \mathrm{f}(y)\,.$$ 2 b

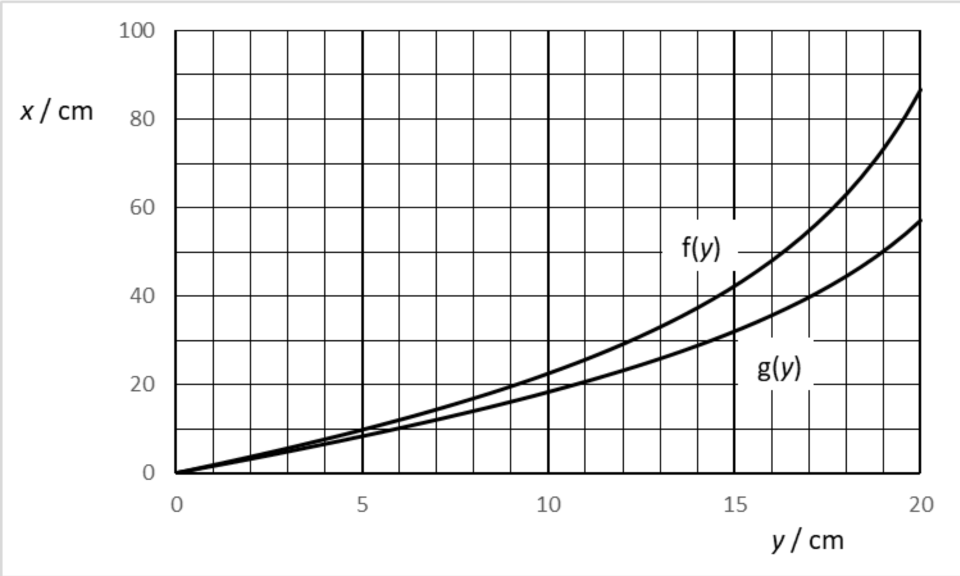
c) V druhom prípade ide o adiabatický dej, pre ktorý platí

$$p_0\, l_0^{\kappa} = p\,(l_0 + x - y)^{\kappa}\,. \qquad (3)$$

S použitím funkcie (2), vylúčením tlaku p máme

$$x = y + \left[\left(1 - \frac{k}{S\, p_0}\, y\right)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1\right] l_0 = \mathrm{g}(y)\,.$$ 2 b

d) Graf



Obr. RC–2 graf 3 b

Pre x = 50 cm máme z grafu pre izotermický dej $y \approx 16{,}3$ cm, pre adiabatický $y \approx 19$ cm. 1 b

4. Analýza pádu s odporom vzduchu – *experimentálna úloha*

5. Mars

a) Priemerná hustota je pomer hmotnosti a objemu planéty. Hmotnosť určíme z parametrov obehu mesiaca okolo planéty. Pre pohyb po kružnici v centrálnom gravitačnom poli Marsu platí rovnica

$$F_{\mathrm{MD}} = F_{\mathrm{Dz}}, \text{ resp. } G\,\frac{M_{\mathrm{M}}\,M_{\mathrm{D}}}{R_{\mathrm{D}}^2} = M_{\mathrm{D}}\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{D}}}\right)^2 R_{\mathrm{D}},$$

kde F_{MD} je gravitačná sila medzi Marsom a Deimosom a F_{Dz} zotrvačná (odstredivá) sily pôsobiaca na Deimos na kružnicovej trajektórii.
Z ostatného vzťahu máme hmotnosť Marsu

$$M_{\mathrm{M}} = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{R_{\mathrm{D}}^3}{T_{\mathrm{D}}^2}.$$ Pre dané hodnoty $M_{\mathrm{M}} \approx 6{,}40\times10^{23}$ kg. 2 b

Z tretieho Keplerovho zákona, určíme polomer orbitálnej trajektórie Marsu

$$\frac{T_{\mathrm{M}}^2}{R_{\mathrm{M}}^3} = \frac{T_{\mathrm{Z}}^2}{R_{\mathrm{Z}}^3}, \text{ resp. } R_{\mathrm{M}} = R_{\mathrm{Z}}\sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{M}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2}}.$$ Pre dané hodnoty $R_{\mathrm{M}} \approx 2{,}29\times10^{11}$ m.

V okamihu najväčšieho priblíženia je vzdialenosť Marsu od Zeme $d_{\mathrm{m}} = R_{\mathrm{M}} - R_{\mathrm{Z}}$. Uhol, pod ktorým Mars v tomto okamihu vidno je $\varphi = 2r_{\mathrm{M}} / d_{\mathrm{m}}$, odkiaľ máme polomer Marsu

$r_M = \dfrac{d_m}{2}\varphi$. Pre dané hodnoty $r_M \approx 3{,}41 \times 10^6$ m.

Priemerná hustota Marsu

$\rho_M = \dfrac{M_M}{V_M} = \dfrac{3M_M}{4\pi r_M^3}$. Pre dané hodnoty $\rho_M \approx 3{,}86 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. 1 b

b) Planéty Mars a Zem obiehajú okolo Slnka s uhlovými rýchlosťami ω_M a ω_Z v rovnakom smere. Uhlová rýchlosť vzájomného pohybu je $\Delta\omega = \omega_Z - \omega_M$. Situácia maximálneho priblíženia sa pravidelne opakuje s časovým intervalom daným vzťahom $\Delta\omega\, t_o = 2\,\pi$. Odtiaľ máme

$t_o = \dfrac{2\pi}{\omega_Z - \omega_M} = \dfrac{T_Z T_M}{T_M - T_Z}$. Pre dané hodnoty $t_o \approx 780$ dní. 1 b

Ak k dátumu 22. 5. 2016 pripočítame 780 dní, dostávame dátum 11. 7. 2018. 1 b

c) Ak predpokladáme, že Mars je homogénna guľa s hmotnosťou M_M, intenzita gravitačného poľa na jeho povrchu

$$g_M = G\frac{M_M}{r_M^2}.$$

Táto hodnota predstavuje gravitačné zrýchlenie na póle, pre dané hodnoty $g_{M0} \approx 3{,}67\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. 2 b

Na rovníku pôsobí proti smeru gravitačnej sily zotrvačná (odstredivá) sila v dôsledku rotácie planéty

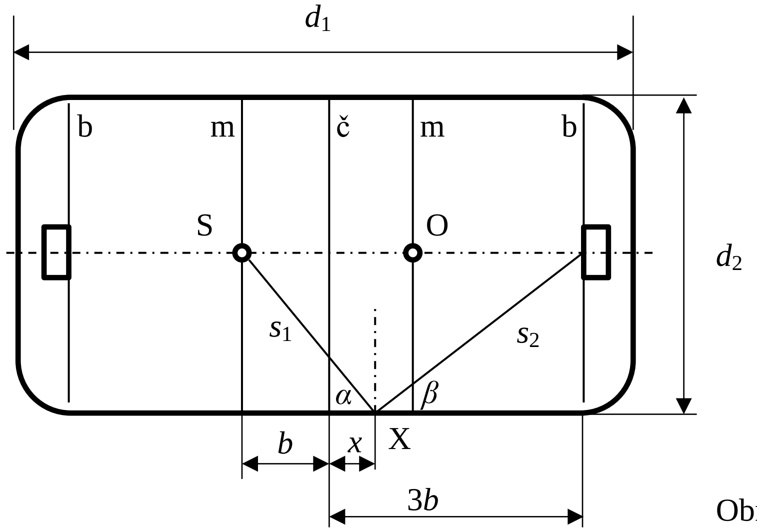
$g_{Mr} = G\dfrac{M_M}{r_M^2} - \dfrac{v_r^2}{r_M}$. Pre dané hodnoty $g_{Mr} \approx 3{,}65\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. 1 b

d) V tabuľkách možno nájsť hodnoty $\rho_M = 3{,}934 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $M_M = 6{,}4185 \times 10^{23}$ kg, dátum nasledujúceho maximálneho priblíženia k Zemi 31. 7. 2018 a tiažové zrýchlenie na rovníku Marsu $g_{Mr} = 3{,}69\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. 4×0,25 b

Ako vidíme, výsledky získané pri našich zjednodušujúcich predpokladoch sa veľmi blížia k publikovaným hodnotám. Hlavnou príčinou tohto rozdielu je nenulová excentricita trajektórií planét, predpoklad homogénnej gule je tiež zjednodušujúci. 1 b

6. Hokej

a) Obrázok RC–3 1 b



Obr. RC–3

b) Ak označíme $b = (d_1 - 2d_3)/6 \approx 8{,}67$ m vzdialenosť medzi modrou a červenou čiarou, je vzdialenosť medzi modrou a bránkovou čiarou $2b$.

Čas $t_m = 2b/v_m$.

Pre dané hodnoty $t_1 \approx 0{,}36$ s, čo je veľmi krátka doba na reakciu brankára. 1 b

c) Strelec S vystrelí puk rýchlosťou v_1, do bodu X odrazu puk príde rýchlosťou v_2 a po odraze od mantinelu má rýchlosť v_3. Uhly dopadu a odrazu sú α a β.

Pre zložky rýchlosti rovnobežné s mantinelom a kolmé na mantinel v bode X máme

$$v_3 \cos\beta = v_2 \cos\alpha \quad \text{a} \quad v_3 \sin\beta = p\, v_2 \sin\alpha \ ,$$

kde $\tan\alpha = \dfrac{d_2}{2(b+x)}$ a $\tan\beta = \dfrac{d_2}{2(3b-x)}$.

Po úprave $\tan\beta = p\ \tan\alpha$, ako vyplýva zo zadania a po úprave máme

$$x = \frac{3p-1}{1+p}\, b\,.$$

Pre dané hodnoty $x = 6{,}19$ m, $\alpha \approx 45{,}3°$, $\beta \approx 37{,}1°$. 2 b

d) Pohyb puku je rovnomerne spomalený so zrýchlením $a = -\, g\, f$.

Označme čas od okamihu vystrelenia až po dopad na mantinel t_1. Potom pre dráhu s_1 puku (obr. RC–3) máme

$$s_1 = v_1\, t_1 - \frac{1}{2} g\ f\ t_1^2 = \sqrt{(b+x)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}\,. \qquad (1)$$

Pre dané hodnoty $s_1 \approx 21{,}11$ m. 1 b

Z (1) určíme čas t_1

$$t_1^2 - 2\frac{v_1}{g\ f}\, t_1 + \frac{2s_1}{g\ f} = 0\,, \text{ resp. } \quad t_1 = \frac{v_1}{g\ f} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1}{g\ f}\right)^2 - \frac{2s_1}{g\ f}} \qquad (2)$$

Fyzikálny význam má znamienko mínus.
Pre dané hodnoty $s_1 \approx 21{,}11$ m, $t_1 \approx 0{,}765$ s. 1 b
Pri rýchlosti výstrelu v_1 dopadne puk na mantinel rýchlosťou

$$v_2 = v_1 - g\,f\,t_1.$$

Rýchlosť po odraze

$$v_3 = \sqrt{\left(v_2 \cos\alpha\right)^2 + \left(p\,v_2 \sin\alpha\right)^2} = \left(v_1 - g\ f\ t_1\right)\cos\alpha\,\sqrt{1 + p^2 \tan^2\alpha}\ .$$

Pre dané a vypočítané hodnoty $v_3 \approx 24{,}19\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 1 b

Čas pohybu puku po odraze od mantinelu až po prechod stredom bránky t_2 určíme pomocou dráhy puku po odraze od mantinelu

$$s_2 = v_3 t_2 - \frac{1}{2} g\ f\ t_2^2 = \sqrt{\left(3b - x\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}\ ,$$

odkiaľ máme $s_2 \approx 24{,}86$ m 1 b
a rovnako ako v prípade (2) určíme čas t_2

$$t_2 = \frac{v_3}{g\ f} \pm \sqrt{\left(\frac{v_3}{g\ f}\right)^2 - \frac{2 s_2}{g\ f}}\ .$$

Pre dané hodnoty $t_2 \approx 1{,}039$ s. 1 b
Celkový čas pohybu puku $t = t_1 + t_2 \approx 1{,}80\ \mathrm{s} < t_0$ (2,10 s), preto obranca puk nedostihne pred dosiahnutím bránky. 1 b

7. Zrážka s meteoroidom

Pre prúdenie vzduchu otvorom použijeme Bernoulliho rovnicu. Pre body vo vnútri lode, kde je tlak vzduchu p_0, a v mieste tesne pred otvorom na vonkajšej strane lode, kde je nulový tlak, máme

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho v^2 , \qquad \text{2 b}$$

čo predstavuje zákon zachovania energie pre expanziu vzduchu do vákua.

Predpokladáme, že pred expanziou má hustota (a teda aj tlak) vzduchu pred otvorom rovnakú hodnotu hustoty ako vo vnútri lode. Hustotu vzduchu určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$p_0 V = \frac{m}{M_\mathrm{m}} R\,T \text{, odkiaľ } \rho = \frac{p_0 M_\mathrm{m}}{R\,T} . \qquad (1) \qquad \text{2 b}$$

Objemový tok vzduchu otvorom

$$Q_V = S\,v = S\sqrt{\frac{2\,p_0}{\rho}} = S\sqrt{\frac{2RT}{M_\mathrm{m}}} . \qquad (2) \qquad \text{2 b}$$

Ak predpokladáme, že úbytok vzduchu je tak malý (1 %), že teplotu i hustotu možno považovať za konštantnú, pre malý úbytok hmotnosti vzduchu za čas τ máme

$$\Delta m = \rho\,Q_V\,\tau . \qquad (3) \qquad \text{1 b}$$

Úbytok tlaku vzduchu Δp vo vnútri lode určíme zo stavovej rovnice (1)

$$\Delta p = k\,p_0 = \frac{\Delta m}{V M_\mathrm{m}} R\,T ,$$

kde k je predpokladaný úbytok tlaku vzduchu 1 %, tzn. $k \approx 0{,}0100$, a pomocou (2) a (3) určíme tomu zodpovedajúci čas

$$\tau = k\,\frac{V}{S}\sqrt{\frac{M_\mathrm{m}}{2RT}} . \qquad \text{2 b}$$

Pre dané hodnoty $\tau \approx 241$ s. 1 b

59. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád 1, 2, 3, 6, 7, Ivo Čáp 4, 5
Spracovanie návrhov úloh a riešení:	Ivo Čáp, Ľubomír Konrád
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018