MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

1 Na prehliadke v miestnosti múzea bola skupina chlapcov a dievčat. Po prehliadke odišlo 15 dievčat, a v miestnosti tak zostalo dvakrát viac chlapcov ako dievčat. Následne odišlo 45 chlapcov, a v miestnosti tak zostalo päťkrát viac dievčat ako chlapcov.

Koľko dievčat bolo v miestnosti múzea počas prehliadky?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Označme d a c počty dievčat a chlapcov počas prehliadky. Vzťahy zo zadania je možné zapísať ako sústavu rovníc

$$c = 2(d - 15),$$

$$d - 15 = 5(c - 45).$$

Počet dievčat po prehliadke vyjadrený z prvého vzťahu je $d - 15 = \frac{1}{2}c$. Spoločne s druhým vzťahom dostávame rovnicu s neznámou c,

$$\frac{1}{2}c = 5(c - 45),$$

ktorú vyriešime:

$$c = 10c - 450,$$

$$9c = 450,$$

$$c = 50.$$

Po dosadení do druhej rovnice sústavy dostávame

$$d - 15 = 5(50 - 45) = 5 \cdot 5 = 25,$$

takže

$$d = 25 + 12 = 40.$$

Počas prehliadky teda bolo v miestnosti múzea 50 chlapcov a 40 dievčat. Po prehliadke odišlo 15 dievčat, ostalo ich teda $40 - 15$ čiže 25, takže chlapcov vtedy bolo naozaj dvakrát viac. Po odchode 45 chlapcov ich ostalo $50 - 45$ čiže 5, takže dievčat vtedy bolo naozaj päťkrát viac.

Počas prehliadky bolo v miestnosti múzea 40 dievčat.

Poznámka:

Sústavu rovníc je možné riešiť rôznymi spôsobmi. Napr. dosadenie prvej rovnice do druhej dáva rovnicu s neznámu d, ktorú vyriešime nasledovne:

$$d - 15 = 5\,(2(d - 15) - 45)\,,$$

$$d - 15 = 10d - 375,$$

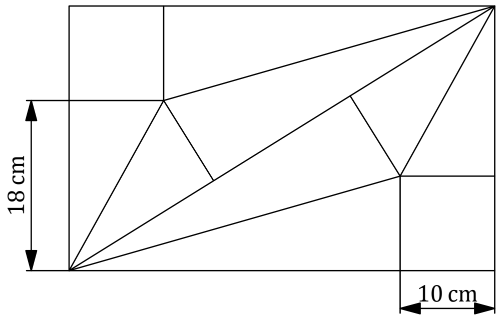
$$9d = 360,$$

$$d = 40.$$

Pokyny:

2 body za formuláciu uvedenej sústavy rovníc; 2 body za doriešenie sústavy rovníc; 2 body za kvalitu komentára. Pri skúšaní možností zvážte úplnosť komentára, náhodne odhalené nezdôvodnené riešenie hodnoťte 2 bodmi.

2 Obdĺžnik na obrázku je rozdelený na dva zhodné štvorce, štyri zhodné menšie pravouhlé trojuholníky a štyri zhodné väčšie pravouhlé trojuholníky. Veľkosti niektorých strán sú vyznačené na obrázku.



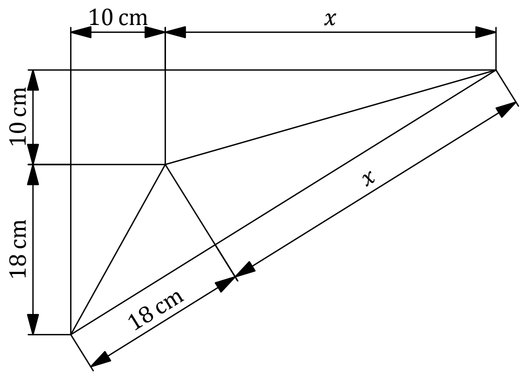
Vypočítajte rozmery obdĺžnika.

(Mária Dományová)

Riešenie 1:

V rohoch obdĺžnika sú zhodné štvorce so stranou dĺžky 10 cm. Teda zvislá strana obdĺžnika meria 18 cm + 10 cm čiže 28 cm.

Na stranách obdĺžnika je iba jedna neznáma úsečka (avšak dvakrát), a tú označíme x. Zo zhodností čiastkových trojuholníkov vieme určiť aj časti uhlopriečky obdĺžnika. Táto uhlopriečka delí obdĺžnik na dva zhodné pravouhlé trojuholníky, ktorého strany sú popísané takto:



Podľa Pytagorovej vety platí

$$(18\,\text{cm} + x)^2 = (28\,\text{cm})^2 + (10\,\text{cm} + x)^2.$$

Po umocnení a úpravách dostávame:

$$(18\,\text{cm},)^2 + 36\,\text{cm} \cdot x + x^2 = (28\,\text{cm})^2 + 100\,\text{cm}^2 + 20\,\text{cm} \cdot x + x^2,$$

$$16\,\text{cm} \cdot x = (28\,\text{cm})^2 + 100\,\text{cm}^2 - (18\,\text{cm})^2,$$

$$16\,\text{cm} \cdot x = 784\,\text{cm}^2 + 100\,\text{cm}^2 - 324\,\text{cm}^2,$$

$$16\,\text{cm} \cdot x = 560\,\text{cm}^2,$$

$$x = 35\,\text{cm}.$$

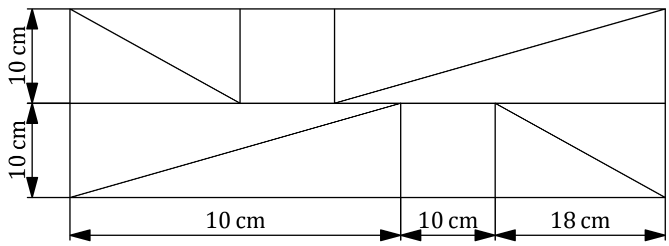
Vodorovná strana obdĺžnika teda meria 35 cm + 10 cm čiže 45 cm.

Rozmery obdĺžnika sú 28 cm a 45 cm.

Riešenie 2:

Na stranách obdĺžnika je iba jedna neznáma úsečka (avšak dvakrát), a tú označíme x. Jeho obsah je potom $28\,\text{cm} \cdot (10\,\text{cm} + x)$.

Obdĺžnik pozostáva z desiatich menších častí, ktoré všetky majú aspoň jeden pravý uhol a aspoň jednu stranu dĺžky 10 cm. Z týchto častí zostavíme nový obdĺžnik takto:



Obsah nového obdĺžnika je $20\,\mathrm{cm} \cdot (28\,\mathrm{cm} + x)$. Preusporiadaním častí sa však obsah nezmenil, takže dostávame rovnicu

$$28\,\mathrm{cm} \cdot (10\,\mathrm{cm} + x) = 20\,\mathrm{cm} \cdot (28\,\mathrm{cm} + x),$$

ktorú vyriešime:

$$280\,\mathrm{cm}^2 + 28\,\mathrm{cm} \cdot x = 560\,\mathrm{cm}^2 + 20\,\mathrm{cm} \cdot x,$$

$$8\,\mathrm{cm} \cdot x = 280\,\mathrm{cm}^2,$$

$$x = 35\,\mathrm{cm}.$$

Vodorovná strana obdĺžnika teda meria $35\,\mathrm{cm} + 10\,\mathrm{cm}$ čiže $45\,\mathrm{cm}$.

Rozmery obdĺžnika sú $28\,\mathrm{cm}$ a $45\,\mathrm{cm}$.

Poznámka:

Namiesto obdĺžnika v druhom riešení úlohy, t. j. na trojuholník ako v prvom riešení, po preusporiadaní tak vznikne napr. dolná polovica nového obdĺžnika. Odvodili by sme tak ekvivalentnú rovnicu

$$14\,\mathrm{cm} \cdot (10\,\mathrm{cm} + x) = 10\,\mathrm{cm} \cdot (28\,\mathrm{cm} + x).$$

Pravú stranu tejto rovnice je možné interpretovať ako vzorec $\frac{1}{2} \cdot r \cdot o$ pre obsah trojuholníka, kde o je jeho obvod trojuholníka a r polomer do neho vpísanej kružnice (stredom tejto kružnice je spoločný bod vyznačených úsečiek vo vnútri trojuholníka na prvom obrázku). Tento vzorec možno nájsť v povolených tabuľkách, teda na ňom založené riešenie by malo byť považované za správne.

Pokyny:

1 bod za zvislú stranu obdĺžnika; 1 bod za vyjadrenie ďalších častí pomocou neznámej a niektorej rovnice, ktorej je jediným riešením (napríklad $(18\,\mathrm{cm} + x)^2 = (28\,\mathrm{cm})^2 + (10\,\mathrm{cm} + x)^2)$; 2 body za doriešenie a výsledok; 2 body za kvalitu komentára.

---

3 Iveta postupne vypisovala prirodzené čísla tvorené číslicami 1, 3, 5, 7. Žiadne iné číslice nepoužila, postupovala vzostupne od najmenšieho čísla a žiadne číslo nezabudla. Čísla písala bezprostredne za sebou, čím zostavila jedno mimoriadne dlhé číslo:

1357111315173133 ...

Ktorá číslica je v tomto čísle na 1286. mieste?

(Erika Novotná)

Riešenie:

Z daných číslic Iveta vytvorila 4 jednociferné čísla, ktoré spolu zaberajú v Ivetinom dlhom čísle 4 miesta.

Ďalej vytvorila 4^2 čiže 16 dvojciferných čísel, ktoré spolu zaberajú $2 \cdot 16$ čiže 32 miest. Posledná číslica posledného dvojciferného čísla je teda na 36. mieste (lebo $4 + 32 = 36$).

Potom vytvorila 4^3 čiže 64 trojciferných čísel, ktoré spolu zaberajú $3 \cdot 64$ čiže 192 miest. Posledná číslica posledného trojciferného čísla je teda na 228. mieste (lebo $36 + 192 = 228$).

Potom vytvorila 4^4 čiže 256 štvorciferných čísel, ktoré spolu zaberajú $4 \cdot 256$ čiže 1024 miest. Posledná číslica posledného štvorciferného čísla je teda na 1252. mieste (lebo $228 + 1024 = 1252$).

Do 1286. miesta chýba 34 miest a tie sú obsadené päťcifernými číslami. Pritom 34 delené 5 je 6 so zvyškom 4, teda hľadaná číslica je 4. číslicou v 7. päťcifernom čísle. Tieto čísla sú postupne

$$11111, \quad 11113, \quad 11115, \quad 11117, \quad 11131, \quad 11133, \quad 111\underline{3}5.$$

V Ivetinom mimoriadne dlhom čísle je na 1286. mieste číslica 3.

Pokyny:

2 body za počty jedno-, dvoj-, troj- a štvorciferných čísel; 2 body za počty miest týchto čísel v Ivetinom dlhom čísle; 2 body za určenie hľadanej číslice a kvalitu komentára.

---

4 V piatich vrecúškach je spolu 52 guľôčok. V žiadnych dvoch vrecúškach nie je rovnaký počet guľôčok, niektoré vrecúško môže byť i prázdne. Všetky guľôčky z akéhokoľvek (neprázdneho) vrecúška je možné premiestniť do ostatných štyroch vrecúšok tak, že v nich budú rovnaké počty guľôčok.

a) Nájdite nejaké rozdelenie guľôčok do vrecúšok, ktoré má všetky uvedené vlastnosti.

b) Ukážte, že pri akomkoľvek rozdelení s uvedenými vlastnosťami je v niektorom vrecúšku práve 12 guľôčok.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Po premiestnení guľôčok je jedno vrecúško prázdne a v ostatných štyroch sú ich rovnaké počty. Dokopy je guľôčok 52, teda po premiestnení je v neprázdnych vrecúškach po $52 : 4$ čiže 13 guľôčok. Preto pôvodne nemohlo byť v žiadnom vrecúšku viac ako 13 guľôčok.

a) Možné pôvodné počty guľôčok vo vrecúškach zodpovedajú možným množinám piatich navzájom rôznych nezáporných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako 13, so súčtom 52. Systematickým rozborom možno získať všetky takéto päťprvkové množiny:

$$\{13, 12, 11, 10, 6\}, \quad \{13, 12, 11, 9, 7\}, \quad \{13, 12, 10, 9, 8\}.$$

b) Ak by v žiadnom vrecúšku nebolo 12 guľôčok, tak by vo všetkých dohromady bolo najviac $13+11+10+9+8$ čiže 51 guľôčok. Teda v niektorom vrecúšku muselo byť 12 guľôčok.

Pokyny:

1 bod za ľubovoľné vyhovujúce rozdelenie; 2 body za zdôvodnenie, že v žiadnom vrecúšku nebolo viac ako 13 guľôčok; 3 body za zdôvodnenie, že v niektorom vrecúšku bolo 12 guľôčok.

Riešenia časti b) založené na tom, že v časti a) riešiteľ našiel všetky vyhovujúce množiny a zdôvodnil, že sú všetky, môžu byť hodnotené plným počtom bodov v závislosti od úplnosti komentára k časti a).

Riešenia obsahujúce všetky možnosti bez zdôvodnenia ohodnoťte 2 bodmi.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov.

Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Opäť upozorňujeme na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO https://skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete.

Prosíme, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6.–8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže