2017/2018
67. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v piatok 19. januára 2018.*)

1. Nájdite najmenšie štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ také, že rozdiel

$$(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$$

je trojciferné číslo zapísané tromi rovnakými ciframi.

(*Patrik Bak, Mária Dományová*)

2. Určte najväčší možný počet neprázdnych po dvoch disjunktných množín s rovnakými súčtami prvkov, na ktoré možno rozdeliť množinu

a) $\{1, 2, ..., 2017\}$,
b) $\{1, 2, ..., 2018\}$.

Ak je množina tvorená jedným číslom, považujeme ho za súčet jej prvkov.

(*Patrik Bak*)

3. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C. V polrovine s hraničnou priamkou AB a vnútorným bodom C uvažujme body E, F také, že uhly EBA, FAB sú pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokážte, že priamky AE a BF sa pretínajú na úsečke CD. (*Jaroslav Švrček*)

4. Určte najväčšie celé číslo n, pri ktorom možno štvorcovú tabuľku $n \times n$ zaplniť prirodzenými číslami od 1 po n^2 tak, aby v každej jej štvorcovej časti 3×3 bola zapísaná aspoň jedna druhá mocnina celého čísla. (*Jaromír Šimša*)

5. Daná je kružnica $k(O, r)$ a bod A, pričom $|AO| = d > r$. Dotyčnice z bodu A sa dotýkajú kružnice k v bodoch B, C. Trojuholníku ABC je vpísaná kružnica. Vyjadrite jej polomer ϱ pomocou daných dĺžok d a r. (*Šárka Gergelitsová*)

6. Na kruhovom opevnení hradu je niekoľko veží. Do nich sa rozmiestni päť čiernych a päť červených rytierov (v každej veži ich môže byť viac a môžu mať rôzne farby) a začnú strážiť. Po uplynutí každej hodiny prejdú všetci čierni rytieri do susednej veže v smere chodu hodinových ručičiek a všetci červení rytieri prejdú do susednej veže v opačnom smere. Dokážte nasledujúce tvrdenie:

a) Ak je veží osem, môžu sa rytieri na začiatku rozmiestniť tak, že počas každej hodiny bude v každej veži aspoň jeden rytier.
b) Ak je veží sedem, niektorú hodinu ostane aspoň jedna veža neobsadená, nech už sa na začiatku rytieri rozmiestnia akokoľvek.

(*Pavel Calábek*)

2017/2018
67. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v piatok 19. januára 2018.*)

1. Nájdite všetky mnohočleny tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$, ktoré po delení dvojčlenom $2x^2 + 1$ dávajú zvyšok $x + 2$ a po delení dvojčlenom $x^2 + 2$ dávajú zvyšok $2x + 1$. (*Pavel Calábek*)

2. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo t platia nerovnosti

$$0 \leqq \frac{t^2+1}{t+1} - \sqrt{t} \leqq |t-1|.$$

(*Tomáš Jurík*)

3. Nech $ABCD$ je kosoštvorec s kratšou uhlopriečkou BD a E vnútorný bod jeho strany CD, ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD. Určte veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole A, ak majú kružnice opísané trojuholníkom ACD a BCE práve jeden spoločný bod. (*Jaroslav Švrček*)

4. Určte počet všetkých trojíc prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(*Patrik Bak*)

5. Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obe priamky, z ktorých každá delí daný lichobežník na dve časti s rovnakým obsahom a je pritom rovnobežná s jeho uhlopriečkou AC, resp. BD. Dokážte, že priesečník týchto dvoch priamok leží na úsečke, ktorá spája stredy oboch základní AB a CD. (*Jaromír Šimša*)

6. Nájdite najväčší možný počet čísel, ktoré možno vybrať z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ tak, aby medzi nimi neboli žiadne dve, ktoré sa líšia o 2 alebo o 5. (*Pavel Calábek*)

2017/2018
67. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 4. decembra 2017.*)

1. Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako rozdiel $O - X$, pričom O je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krúžkov ako krížikov a X je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krížikov ako krúžkov.

a) Dokážte, že pre tabuľku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.

b) Určte najvyššie možné skóre dosiahnuteľné pre tabuľku $(2n+1) \times (2n+1)$ v závislosti od n.

(*Josef Tkadlec*)

2. Dokážte, že ak je súčet dvoch daných reálnych čísel a, b väčší ako 2, má sústava nerovníc

$$(a-1)x + b < x^2 < ax + (b-1)$$

nekonečne veľa riešení x v obore reálnych čísel. (*Jaromír Šimša*)

3. V rovine sú dané dve zhodné kružnice s polomerom 1, ktoré majú vonkajší dotyk. Uvažujme pravouholník obsahujúci obe kružnice, ktorého každá strana sa dotýka aspoň jednej z nich. Určte najväčší a najmenší možný obsah takého pravouholníka.

(*Jaroslav Švrček*)

4. Nájdite najväčšie prirodzené číslo n také, že hodnota súčtu

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

je prvočíslo. Zápis $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x.

(*Patrik Bak*)

5. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\angle ABC| = |\angle ACD|$ a $|\angle ACB| = |\angle ADC|$. Predpokladajme, že stred O kružnice opísanej trojuholníku BCD je rôzny od bodu A. Dokážte, že uhol OAC je pravý. (*Patrik Bak*)

6. Nájdite najväčší možný počet prvkov množiny M celých čísel, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: Z každej trojice rôznych čísel z M možno vybrať niektoré dve, ktorých súčet je mocninou čísla 2 s celočíselným exponentom. (*Ján Mazák*)