

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh domácej prípravy kategórie Z9

1 V rohových políčkach tabuľky 3×3 sú napísané čísla tak, ako na obrázku:

3		6
12		15

Do prázdnych políčk doplníte nenulové prirodzené čísla tak, aby súčin čísel v každom riadku a každom stĺpci bol rovnaký. Nájdite všetky možnosti.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Súčin daných čísel v prvom riadku je 18, v treťom riadku 180, v prvom stĺpci 36 a v treťom stĺpci 90. Čísla 18, 36, 90 sú delitele čísla 180:

$$180 = 18 \cdot 10 = 36 \cdot 5 = 90 \cdot 2.$$

Aby súčiny všetkých čísel v týchto štyroch riadkoch/stĺpcoch boli rovnaké, musia byť neznáme čísla v prvom riadku, v prvom stĺpci a v treťom stĺpci násobky neznámeho čísla v treťom riadku. Toto číslo označíme x , neznáme číslo v strednom políčku označíme y :

3	$10x$	6
$5x$	y	$2x$
12	x	15

Aby súčin všetkých čísel v druhom riadku či stĺpci bol rovnaký ako všetky ostatné, musí platiť $10x^2y = 180x$, a teda $xy = 18$. Číslo 18 má šesť deliteľov, a to 1, 2, 3, 6, 9, 18. To sú jediné možnosti na doplnenie neznámych x a y .

Tabuľku je možné doplniť 6 spôsobmi:

3	10	6
5	18	2
12	1	15

3	20	6
10	9	4
12	2	15

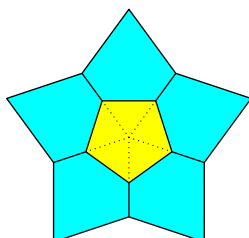
3	30	6
15	6	6
12	3	15

3	60	6
30	3	12
12	6	15

3	90	6
45	2	18
12	9	15

3	180	6
90	1	36
12	18	15

2 Útvar na obrázku je vytvorený z piatich zhodných azúrových kosoštvorcov a jedného žltého pravidelného päťuholníka, ktorý kosoštvorce čiastočne prekrýva. Kosoštvorce susedia celými stranami a na týchto stranách ležia vrcholy päťuholníka. Pomer dĺžky polomeru kružnice opísanej päťuholníku a dĺžky strany kosoštvorca je 4 : 7.

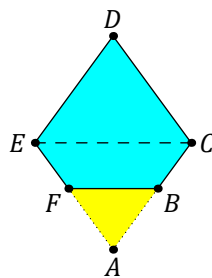


Rozhodnite, či neprekrytá časť každého kosoštvorca má väčší, rovnaký alebo menší obsah ako päťuholník.

(Mária Dományová)

Riešenie:

Vyberáme jeden čiastočne prekrytý kosoštvorec, príslušné body označíme ako na obrázku:



Úsečky BF a CE sú rovnobežné, teda trojuholníky ABF a ACE sú podobné. Úsečka AB predstavuje polomer kružnice opísanej päťuholníku, úsečka AC je stranou kosoštvorca. Ich veľkosti sú v pomere $4 : 7$, a to je aj koeficient podobnosti trojuholníkov ABF a ACE . Pre ich obsahy teda platí

$$S(ABF) : S(ACE) = 16 : 49.$$

Päťuholník má obsah $5 \cdot S(ABF)$, neprekrytá časť kosoštvorca má obsah $2 \cdot S(ACE) - S(ABF)$. Z toho dostávame:

$$5 \cdot S(ABF) = 5 \cdot \frac{16}{49} \cdot S(ACE) = \frac{80}{49} \cdot S(ACE),$$

$$2 \cdot S(ACE) - S(ABF) = \left(2 - \frac{16}{49}\right) \cdot S(ACE) = \frac{82}{49} \cdot S(ACE).$$

Neprekrytá časť kosoštvorca má väčší obsah ako päťuholník.

Poznámka:

Pre všeobecný koeficient k podobnosti trojuholníkov ABF a ACE vychádza $5 \cdot S(ABF) = 2 \cdot S(ACE) - S(ABF)$ práve vtedy, keď $5k^2 = 2 - k^2$, čiže $k^2 = 1/3$. V prípade $k = 4/7$ dostávame $k^2 = 16/49 < 1/3$, a teda $5 \cdot S(ABF) < 2 \cdot S(ACE) - S(ABF)$.

- 3 Na tabuli je napísaných niekoľko po sebe nasledujúcich prirodzených čísel počnúc číslom 1. Každé z týchto čísel má buď azúrovú, alebo žltú farbu. Súčet každých dvoch rôznofarebných čísel je prvočíslo, súčet každých dvoch čísel rovnakej farby je zložené číslo.

Najviac koľko čísel môže byť napísaných na tabuli?

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Postupne prejdeme možnosti podľa počtu čísel na tabuli, pričom v každom kroku rozšírime závery predchádzajúceho kroku.

- Počet 1 vyhovuje triviálne, pretože nie je čo sčítat.
- Pri počte 2 je jediný možný súčet $1 + 2$ čiže 3, čo je prvočíslo.
Tento prípad vyhovuje práve vtedy, keď sú čísla 1 a 2 rôznofarebné.
- Pri počte 3 sú navyše súčty $2 + 3$ čiže 5, čo je prvočíslo, a $1 + 3$ čiže 4, čo je zložené číslo.
Tento prípad vyhovuje práve vtedy, keď má 3 rovnakú farbu ako 1 a 2 inú.
- Pri počte 4 sú navyše súčty $3 + 4$ čiže 7, čo je prvočíslo, $2 + 4$ čiže 6, čo je zložené číslo, a $1 + 4$ čiže 5, čo je prvočíslo.
Tento prípad vyhovuje práve vtedy, keď má 4 rovnakú farbu ako 2 a inú ako 1 a 3.
- Počet 5 a vyšší už však nevyhovuje, lebo $2 + 4$ čiže 6 je zložené číslo, takže 2 a 4 majú rovnaké farby, $4 + 5$ čiže 9 je zložené číslo, takže 4 a 5 majú rovnaké farby, ale $2 + 5$ čiže 7 je prvočíslo, takže 2 a 5 majú rôzne farby, čo je spor.

Na tabuli teda môžu byť napísané najviac 4 čísla.

Riešenie 2:

Keďže súčet dvoch rôznofarebných čísel je aspoň $1 + 2$ čiže 3 a je to prvočíslo, tento súčet je nepárny.

Bez ujmy na všeobecnosti nech je číslo 1 azúrové. Jeho súčet s každým žltým číslom je teda nepárny, takže každé žlté je párne.

Keďže súčet každého žltého čísla s každým azúrovým je nepárny, každé azúrové je nepárne.

Zhrnutím tak dostávame, že párne čísla sú žlté a nepárne azúrové. Súčet rovnofarebných je teda párný a väčší než 2, je to teda naozaj zložené číslo.

Keďže číslo 9 čiže $4 + 5$ nie je prvočíslo, medzi číslami na tabuli nie je číslo 5. Sú tam teda najviac 4 čísla. Čísla 1 a 3 sú azúrové a čísla 2 a 4 sú žlté. Pritom sú všetky súčty rôznofarebných čísel, t. j. $1 + 2$ čiže 3, $1 + 4$ čiže 5, $3 + 2$ čiže 5, $3 + 4$ čiže 7, čo sú naozaj prvočísla.

Hľadaný počet je teda 4.

-
- 4 Nenulové prirodzené číslo nazveme *kvadrátové*, ak jeho zápis obsahuje cifru alebo skupinu po sebe idúcich cifier, ktoré sú zápisom druhej mocniny nenulového prirodzeného čísla. (Např. čísla 257 a 725 sú kvadrátové, čísla 275 a 572 nie.)

Určte počet všetkých dvojciferných kvadrátových čísel.

(Monika Dillingerová)

Riešenie 1:

Druhé mocniny jednociferných čísel sú 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Druhé mocniny dvojciferných čísel sú aspoň trojciferné čísla, a preto nie je potrebné ich uvažovať. Teda dvojciferné kvadrátové čísla sú dvojciferné čísla z predchádzajúceho zoznamu alebo čísla obsahujúce cifry 1, 4 či 9 (tieto možnosti sa nevylučujú).

Dvojciferných čísel obsahujúcich danú nenulovú cifru je 18: Pre cifru na mieste jednotiek je to 9 možností ($\overline{1*}$, ..., $\overline{9*}$), pre cifru na mieste desiatok je to 10 možností ($\overline{*0}$, ..., $\overline{*9}$) a číslo s tou istou cifrou na mieste jednotiek aj desiatok je zahrnuté v oboch prípadoch.

Aby sme na nič nezabudli a nič nezahrnuli dvakrát, budeme kvadrátové čísla počítať postupne:

- Dvojciferných čísel v úvodnom zozname je 6 (menovite 16, 25, 36, 49, 64, 81).
- Ďalších čísel obsahujúcich cifru 1 je 16 (čísla 16 a 81 sú už započítané).
- Ďalších čísel obsahujúcich cifru 4 je 14 (čísla 14, 41, 49, 64 sú už započítané).
- Ďalších čísel obsahujúcich cifru 9 je 14 (čísla 19, 91, 49, 94 sú už započítané).

Dvojciferných kvadrátových čísel je dokopy $6 + 16 + 14 + 14$ čiže 50.

Riešenie 2:

Dvojciferné čísla začínajúce sa cifrou 1, 4 či 9 sú kvadrátové. Takýchto čísel je $3 \cdot 10$ čiže 30.

Dvojciferné čísla začínajúce sa cifrou 2, 3, 5, 6, 7 či 8 sú kvadrátové, ak druhá cifra je 1, 4 či 9. Takýchto čísel je $6 \cdot 3$ čiže 18.

Dvojciferné čísla, ktoré sú druhé mocniny prirodzených čísel a ktoré nie sú zahrnuté medzi predchádzajúcimi prípadmi, sú 2, a to 25 a 36.

Dvojciferných kvadrátových čísel je teda $30 + 18 + 2$ čiže 50.

Riešenie 3:

Zistíme, naopak, počet čísel, ktoré túto vlastnosť nemajú:

Zápis takého čísla teda nesmie obsahovať cifry 1, 4, 9, t. j. môže obsahovať len zvyšných 7 cifier 0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, pričom 0 nie je na začiatku.

Dvojciferných čísel z týchto 7 cifier je preto $6 \cdot 7$ čiže 42. Spomedzi dvojciferných druhých mocnín 4^2 čiže 16, 5^2 čiže 25, 6^2 čiže 36, 7^2 čiže 49, 8^2 čiže 64, 9^2 čiže 81 sú medzi nimi 2, a to 25 a 36, takže celkový počet nevyhovujúcich dvojciferných čísel je $42 - 2$ čiže 40.

Keďže všetkých dvojciferných čísel je 90, vyhovujúcich čísel je $90 - 40$ čiže 50.

-
- 5 V lyžiarskom oddiele sa počet všetkých detí znížil o 10 %, pričom pomer dievčat voči všetkým deťom vzrástol z 50 % na 55 %.

O koľko percent sa zmenil počet dievčat?

(Iveta Jančígová)

Riešenie:

Označme d pôvodný počet dievčat v oddiele. Pôvodný pomer dievčat voči všetkým deťom bol 50 %, teda pôvodný počet všetkých detí bol $2d$. Počet všetkých detí sa znížil o 10 %, teda nový počet všetkých detí bol $\frac{9}{10} \cdot 2d$ čiže $\frac{9}{5}d$.

Nový pomer dievčat voči všetkým deťom bol 55 %, teda nový počet dievčat bol $\frac{55}{100} \cdot \frac{9}{5}d$ čiže $\frac{99}{100}d$. Počet dievčat sa teda znížil o 1 %.

Treba však ešte ukázať, že takáto situácia mohla nastať: Stane sa tak napríklad v prípade, keď sú pôvodné počty chlapcov i dievčat zhodne 100 a po znížení je 81 chlapcov a 99 dievčat.

-
- 6 Kružnice k a l sa dotýkajú zvonku, pričom polomer kružnice k je rovnaký ako priemer kružnice l . Bod S je stred kružnice k , bod T je bod dotyku kružníc, bod A leží na kružnici l mimo spojnice stredov kružníc a bod M je stred úsečky AS .

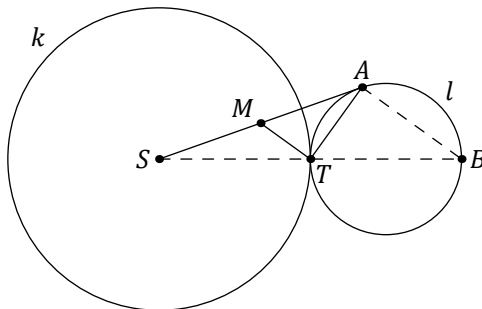
Dokážte, že uhol ATM je pravý.

(Lukáš Komín)

Riešenie:

Dotyk kružníc k a l znamená, že spojnica ich stredov prechádza bodom dotyku T . Druhý priesečník tejto spojnice s kružnicou l označíme B .

Kružnica k má dvakrát väčší polomer ako kružnica l , teda bod T je stred úsečky SB . Bod M je stred úsečky AS , teda MT je stredná priečka trojuholníka SBA . Odtiaľ vyplýva, že úsečky AB a MT sú rovnobežné, a preto sú (striedavé) uhly ATM a BAT zhodné. Podľa Tálesovej vety je uhol BAT pravý, teda aj uhol ATM je pravý.



-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - autori za SK MO: Monika Dillingerová, Mária Dományová, Iveta Jančígová
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajčí, Erika Novotná
 - preklad: Erika Novotná