

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh domácej prípravy kategórie Z5

- 1 Zvláštna kalkulačka má iba dve funkčné tlačidlá. Po stlačení prvého tlačidla sa k číslu na displeji pripočíta číslo 1, po stlačení druhého tlačidla sa číslo na displeji vynásobí číslom 2. Na displeji po každom stlačení tlačidla svieti správny výsledok.

Nájdite dva rôzne spôsoby, ako pomocou 6 stlačení tlačidiel dostať na displeji z čísla 1 číslo 15.

(Iveta Jančígová)

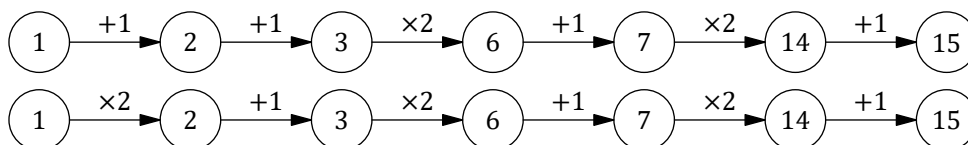
Riešenie:

Úlohu možno znázorniť ako tzv. počtového hada, kde namiesto otáznikov môžeme dosadiť buď $+1$, alebo $\times 2$:



Po násobení akéhokoľvek prirodzeného čísla dvoma je výsledok párne číslo. Teda pred nepárnym číslom musí byť nutne $+1$. Pred párnym číslom môže byť buď $+1$, alebo $\times 2$.

Postupne odzadu nájdeme dve vyhovujúce riešenia:



Poznámka:

Ukážeme, že iné postupy neexistujú:

Kedže po 6. stlačení vznikne nepárne číslo 15, stlačené bolo prvé tlačidlo, a teda pred jeho stlačením, t. j. po 5. stlačení, bolo na displeji číslo $15 - 1$ čiže 14.

Rozoberme prípady:

- Nech bolo pri 5. stlačení stlačené prvé tlačidlo.

Potom pred týmto stlačením, t. j. po 4. stlačení, bolo na displeji číslo $14 - 1$ čiže 13.

Kedže toto číslo je nepárne, pri 4. stlačení bolo stlačené prvé tlačidlo, a teda pred jeho stlačením, t. j. po 3. stlačení, bolo na displeji číslo $13 - 1$ čiže 12.

Po 3 stlačeniach však môžeme z čísla 1 dostať najviac číslo $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 8, čo je spor.

Tento prípad teda nenastáva.

- Nech bolo pri 5. stlačení stlačené druhé tlačidlo.

Potom pred týmto stlačením, t. j. po 4. stlačení, bolo na displeji číslo $14 : 2$ čiže 7.

Kedže toto číslo je nepárne, pri 4. stlačení bolo stlačené prvé tlačidlo, a teda pred jeho stlačením, t. j. po 3. stlačení, bolo na displeji číslo $7 - 1$ čiže 6.

Rozoberme prípady:

- Nech bolo pri 3. stlačení stlačené prvé tlačidlo.

Potom pred týmto stlačením, t. j. po 2. stlačení, bolo na displeji číslo $6 - 1$ čiže 5.

Po 2 stlačeniach však môžeme z čísla 1 dostať najviac číslo $1 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 4, čo je spor.

Tento prípad teda nenastáva.

- Nech bolo pri 3. stlačení stlačené druhé tlačidlo.

Potom pred týmto stlačením, t. j. po 2. stlačení, bolo na displeji číslo $6 : 2$ čiže 3.

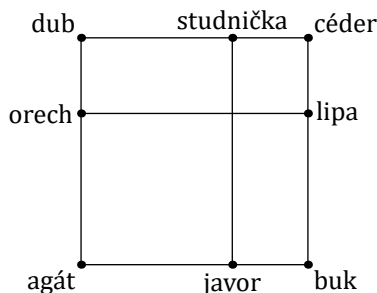
Kedže toto číslo je nepárne, pri 2. stlačení bolo stlačené prvé tlačidlo, a teda pred jeho stlačením, t. j. po 1. stlačení, bolo na displeji číslo $3 - 1$ čiže 2.

Kedže $1 + 1 = 2$ a $1 \cdot 2 = 2$, číslo 2 dostaneme z pôvodného čísla 1 stlačením ľubovoľného tlačidla.

Dostávame tak dve vyššie uvedené riešenia.

- 2 K zámku patrí park v tvare štvorca so stranou dĺžky 240 metrov. Náčrt parku je na obrázku. Po stranách štvorca

vedú cesty, v jeho vrcholoch stoja agát, buk, céder a dub. Park križujú dva ďalšie chodníky rovnobežné so stranami štvorcového parku – jeden vedie od javora k studničke, druhý vedie od lipy k orechu.



Princezná pri svojich prechádzkach parkom chodila len po cestách a chodníkoch, nikdy sa nevracala, ani zbytočne neodbočovala. Zistila, že:

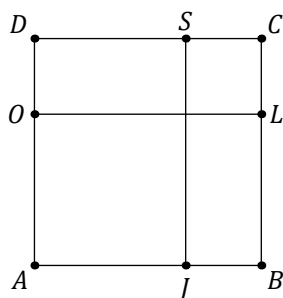
- prechádzka od buka k studničke okolo javora, agáta, orecha a duba je dvakrát dlhšia ako okolo lipy a cédra,
- prechádzka od buka k studničke okolo lipy a cédra je rovnako dlhá ako prechádzka od duba k lipy okolo studničky a cédra.

Aká dlhá je priama cesta od agáta k orechu?

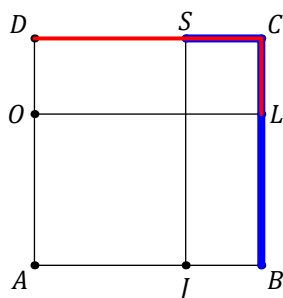
(Marián Macko)

Riešenie:

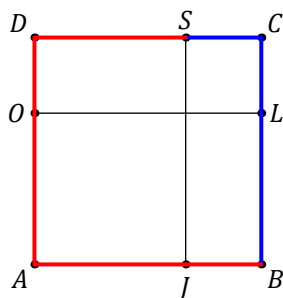
Označme štvorec a jeho význačné body ako na obrázku:



Prechádzky spomínané v druhom bode majú spoločnú časť zodpovedajúcu úsečkám LC a CS . Keďže obe prechádzky sú rovnako dlhé, úsečky BL a SD sú rovnako dlhé. Keďže $ABCD$ je štvorec, aj úsečky LC a CS sú rovnako dlhé. Teda štvorec $ABCD$ je zložený z dvoch štvorcov a dvoch rovnakých obdĺžnikov (so stranami zhodnými s úsečkami BL a LC).



Prechádzky spomínané v prvom bode spolu tvoria obvod štvorca $ABCD$. Obvod tohto štvorca pozostáva zo štyroch rovnakých strán, teda meria $4 \cdot 240$ m čiže 960 m. Prvá prechádzka je dvakrát dlhšia ako druhá, teda druhá prechádzka zodpovedá tretine obvodu štvorca $ABCD$. Dĺžka druhej prechádzky je $960 \text{ m} : 3$ čiže 320 m.



Druhá prechádzka pozostáva z úsečiek BC a CS . Úsečka BC je stranou štvorca, teda dĺžka úsečky CS je

$$|CS| = 320 \text{ m} - 240 \text{ m} = 80 \text{ m}.$$

Z predchádzajúceho vieme, že úsečky AO a BL sú rovnako dlhé a že úsečky LC a CS sú rovnako dlhé. Úsečky BL a LC spolu tvoria stranu BC celého štvorca. Celkovo platí

$$|AO| = |BL| = |BC| - |LC| = |BC| - |CS| = 240 \text{ m} - 80 \text{ m} = 160 \text{ m}.$$

Priama cesta od agátu k orechu meria 160 metrov.

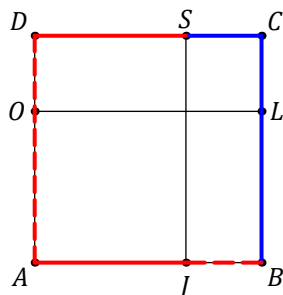
Poznámka:

Pre prechádzky spomínané v prvom bode platí:

- Prvá prechádzka je dvakrát dlhšia ako druhá. Teda rozdiel ich dĺžok je rovnaký ako dĺžka kratšej prechádzky, takže

$$|BC| + |CS| = |BL| + 2 \cdot |LC|.$$

- Rozdiel prechádzok zodpovedá úsečkám AJ a DS , je to teda $|AJ| + |DS|$ čiže $|BL| + |BL|$.
- Spolu dostávame $|BL| = 2 \cdot |LC|$, čiže $|BC| = 3 \cdot |LC|$.
- Keďže $|BC| = 240 \text{ m}$, platí $|LC| = 80 \text{ m}$, a teda $|AO| = |BL| = 160 \text{ m}$.



- 3 Danka a Janka každá pre seba nazbierali jahody. Keby mala Janka o polovicu viac jahôd, než nazbierala, mala by ich rovnako ako Danka. Keby mala Janka dvakrát viac jahôd, než nazbierala, mala by ich o 48 viac ako Danka. Koľko jahôd nazbierala Janka a koľko Danka?

(Monika Dillingerová)

Riešenie 1:

Predpokladajme, že obe dievčatá zbierali jahody do košíkov s rovnakým počtom jahôd, a keďže sa v texte hovorí o polovici Jankiných jahôd, Janka má párny počet košíkov, bez ujmy na všeobecnosti 2.

Podľa zadania má potom Danka o polovicu viac, takže má 3 košíky.

Ak by mala Janka dvakrát viac košíkov, mala by ich 4, takže o 1 viac než Danka. V tomto košíku by bolo podľa zadania 48 jahôd, takže v každom košíku je 48 jahôd.

Janka nazbierala 2 košíky, takže $2 \cdot 48$ čiže 96 jahôd, a Danka 3 košíky, takže $3 \cdot 48$ čiže 144 jahôd.

Poznámka:

Ak by mala Janka iný nenulový párny počet košíkov, moholo by sa stať, že počet jahôd by nebol násobok počtu košíkov, takže by košíky nemali rovnaký počet jahôd. Pri 2 košíkoch však takýto problém určite nenastane.

Riešenie 2:

Počty Jankiných a Dankiných jahôd označme j , resp. d .

Podľa zadania potom platí

$$j + \frac{1}{2}j = d$$

a

$$2j = d + 48.$$

Po dosadení prvého vzťahu do druhého

$$2j = \left(j + \frac{1}{2}j\right) + 48,$$

$$2j - j - \frac{j}{2} = 48,$$

$$\frac{j}{2} = 48,$$

$$j = 96,$$

takže

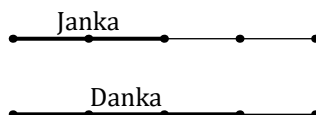
$$d = j + \frac{1}{2}j = 96 + \frac{1}{2} \cdot 96 = 96 + 48 = 144.$$

Janka teda nazbierala 96 jahôd a Danka 144.

Keby mala Janka o polovicu viac jahôd než 96, mala by ich $96 + 48$ čiže 144, t. j. rovnako ako Danka. Keby mala Janka 2-krát viac jahôd než 96, mala by ich 192, čo je o 48 viac než 144, čo nazbierala Danka. Podmienky zadania sú teda splnené.

Riešenie 3:

Podmienky zo zadania možno znázorniť pomocou úsečiek:



Z toho vyplýva, že 48 zodpovedá polovici Jankiných jahôd.

Janka nazbierala $2 \cdot 48$ čiže 96 jahôd, Danka nazbierala $3 \cdot 48$ čiže 144 jahôd.

- 4 Anežka správne vynásobila určité prirodzené číslo číslom 7 a výsledné päťciferné číslo napísala na papier. Papagáj kus papiera vyďobal, a tak sa prvá cifra výsledku stala nečitateľnou. Na zvyšku papiera zostalo napísané 2887.

Aká mohla byť prvá cifra Anežkinho výsledku? Nájdite všetky možnosti.

(Michaela Petrová)

Riešenie 1:

Výsledné číslo po vynásobení číslom 7 bolo päťciferné. Teda pôvodné číslo mohlo byť buď štvorciferné, alebo päťciferné. Úlohu môžeme znázorniť ako algebrogram (srdiečko nemusí byť nahradená cifrou):

$$\begin{array}{r} \text{♥} * * * * \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline * 2 8 8 7 \end{array}$$

Súčin čísla 7 s jednociferným číslom má zakaždým inú cifru na mieste jednotiek:

0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 48, 56, 63, 72.

Vďaka tejto vlastnosti jednoznačne odzadu určujeme posledné štyri hviezdičky:

$$\begin{array}{r} \text{♥} 1 8 4 1 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline * 2 8 8 7 \end{array}$$

Postupne sme počítali:

- $1 \cdot 7 = 7$ (žiadny prechod cez desiatku),
- $4 \cdot 7 = 28$ (prenáša sa 2),
- $8 \cdot 7 + 2 = 58$ (prenáša sa 5),
- $1 \cdot 7 + 5 = 12$ (prenáša sa 1).

Rozoberme prípady:

- Ak bolo pôvodné číslo štvorciferné, tak výpočet vyzeral takto:

$$\begin{array}{r} 1 8 4 1 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 1 2 8 8 7 \end{array}$$

- Ak bolo pôvodné číslo päťciferné, tak jeho prvá cifra bola 1 (aby výsledok bol päťciferný). Výpočet potom vyzeral takto:

$$\begin{array}{r} 1 1 8 4 1 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 8 2 8 8 7 \end{array}$$

Prvá cifra Anežkinho výsledku bola 1 alebo 8.

Riešenie 2:

Vyďobanú cifru označme x . Hľadáme teda číslo $\overline{x2887}$, ktoré je násobok 7.

Potom je násobok 7 aj číslo $\overline{x2887} - 7$ čiže $\overline{x2880}$, takže aj číslo $\overline{x288}$, aj číslo $\overline{x288} - 28$ čiže $\overline{x260}$, takže aj číslo $\overline{x26}$, aj číslo $\overline{x26} + 14$ čiže $\overline{x40}$, takže aj číslo $\overline{x4}$.

Keďže $x \neq 0$, násobok 7 je aj číslo $\overline{x4} - 14$ čiže $\overline{y0}$, kde y je o 1 menšie než x , takže aj číslo y . Preto $y = 0$ alebo $y = 7$, takže $x = 1$ alebo $x = 8$.

Pôvodné číslo teda bolo 12887 alebo 82887.

Keďže $12887 = 7 \cdot 1841$ a $82887 = 7 \cdot 11841$, obe vyhovujú.

Prvá cifra teda bola 1 alebo 8.

Riešenie 3:

Keďže výsledné číslo bolo päťciferné, prvá cifra bola nenulová. Rozoberme prípady:

- $12887 : 7 = 1841$, číslo 12887 teda vyhovuje.
- $22887 : 7 = 3269,571428$, číslo 22887 teda nevyhovuje.
- $32887 : 7 = 4698,142857$, číslo 32887 teda nevyhovuje.
- $42887 : 7 = 6126,714285$, číslo 42887 teda nevyhovuje.
- $52887 : 7 = 7555,285714$, číslo 52887 teda nevyhovuje.
- $62887 : 7 = 8983,857142$, číslo 62887 teda nevyhovuje.
- $72887 : 7 = 10412,428571$, číslo 72887 teda nevyhovuje.
- $82887 : 7 = 11841$, číslo 82887 teda vyhovuje.
- $92887 : 7 = 13269,571428$, číslo 92887 teda nevyhovuje.

Prvá cifra teda bola 1 alebo 8.

- 5 Veky siedmich kamarátov sú 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 rokov. Traja kamaráti sú práve v kine, dvaja sú na futbale a dvaja doma. Súčet vekov tých v kine je 30 rokov a súčet vekov tých na futbale je 24 rokov. Každý z kamarátov na futbale má viac rokov ako Ondrej, ktorý zostal doma.

Koľko rokov môže mať Ondrej? Nájdite všetky možnosti.

(Marián Macko)

Riešenie 1:

Súčet 30 možno pomocou troch daných sčítancov získať iba týmito spôsobmi:

$$30 = 8 + 9 + 13 = 8 + 11 + 11 = 9 + 10 + 11.$$

Súčet 24 možno pomocou dvoch daných sčítancov získať iba týmito spôsobmi:

$$24 = 10 + 14 = 11 + 13.$$

Prvý súčet zodpovedá trom kamarátom v kine, druhý dvom kamarátom na futbale. Uvedené možnosti kombinujeme tak, aby sa dopĺňali, pričom zostávajúce čísla zodpovedajú dvom kamarátom, ktorí sú doma:

v kine	na futbale	doma
8, 9, 13	10, 14	11, 11
8, 11, 11	10, 14	9, 13
9, 10, 11	11, 13	8, 14

Podmienka s Ondrejom môže byť splnená iba v druhom a treťom prípade: Ondrej má buď 9, alebo 8 rokov.

Riešenie 2:

Súčet vekov všetkých kamarátov je $8 + 9 + 10 + 11 + 11 + 13 + 14$ čiže 76, takže súčet dvoch, ktorí ostali doma, je $76 - 30 - 24$ čiže 22. Jeden z nich je pritom Ondrej.

Aspoň dvaja kamaráti sú starší než Ondrej, takže Ondrej má najviac 11 rokov. Rozoberme prípady:

- Nech má Ondrej 11 rokov.

Potom druhý kamarát, ktorý ostal doma, má tiež 11 rokov.

Oba veky 11 sú už teda použité. Kamaráti na futbale sú od Ondreja starší, majú teda 13 a 14 rokov. Súčet ich vekov však potom nie je 24, čo je spor.

Tento prípad teda nenastáva.

- Nech má Ondrej 10 rokov.

Potom druhý kamarát, ktorý ostal doma, má 12 rokov, čo je spor.

Tento prípad teda nenastáva.

- Nech má Ondrej 9 rokov.

Potom druhý kamarát, ktorý ostal doma, má $22 - 9$ čiže 13 rokov.

Ostali veky 8, 10, 11, 11, 14.

Dvaja kamaráti na futbale majú spolu 24 rokov, preto majú 10 a 14 rokov, obaja sú preto naozaj od Ondreja starší.

Zvyšní traja v kine majú potom 8, 11 a 11, a teda spolu naozaj 30 rokov.

- Nech má Ondrej 8 rokov.

Potom druhý kamarát, ktorý ostal doma, má $22 - 8$ čiže 14 rokov.

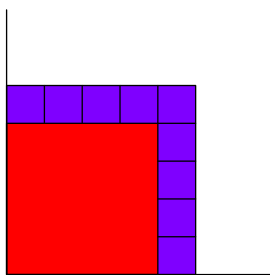
Ostali veky 9, 10, 11, 11, 13.

Dvaja kamaráti na futbale majú spolu 24 rokov, preto majú 11 a 13 rokov, obaja sú preto naozaj od Ondreja starší.

Zvyšní traja v kine majú potom 9, 10 a 11, a teda spolu naozaj 30 rokov.

Ondrej teda môže mať 8 alebo 9 rokov.

- 6 Štyri dievčatá dláždili štvorcovými dlaždicami terasu v rohu dvora. Viola používala dlaždice so stranou 1 dm, Ruženka so stranou 2 dm, Bianka so stranou 3 dm a Karmen so stranou 4 dm. Prvé z dievčat položilo jednu zo svojich dlaždíc do rohu. Druhé položilo svoje dlaždice pozdĺž voľných strán predchádzajúcej dlaždice a pridalo jednu navyše tak, aby vznikol štvorec (napríklad ako na obrázku).



Podobným spôsobom položilo svoje dlaždice tretie a nakoniec aj štvrté dievča. Takto pokryli štvorcovú terasu bez medzier a prekryvov.

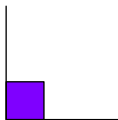
V akom poradí mohli dievčatá klásť dlaždice a koľko dlaždíc celkovo použili? Nájdite všetky možnosti.

(Marián Macko)

Riešenie:

Rozoberme prípady:

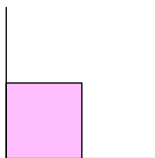
- Nech má prvá dlaždica stranu 1 dm:



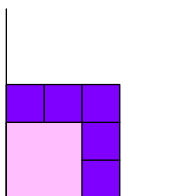
Dlaždice ostatných dievčat sú však väčšie, a preto žiadna z nich nemôže pokračovať.

Tento prípad teda nevyhovuje.

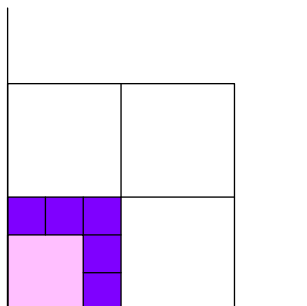
- Nech má prvá dlaždica stranu 2 dm:



Dlaždice 3 dm a 4 dm sú však väčšie, a preto pokračovať môžu iba dlaždice 1 dm:



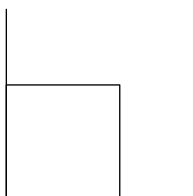
Dlaždice 4 dm sú však väčšie, a preto pokračovať môžu iba dlaždice 3 dm:



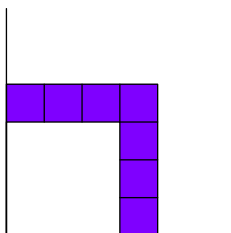
Dlaždice 4 dm však už pridať nie je možné.

Tento prípad teda nevyhovuje.

- Nech má prvá dlaždica stranu 3 dm:

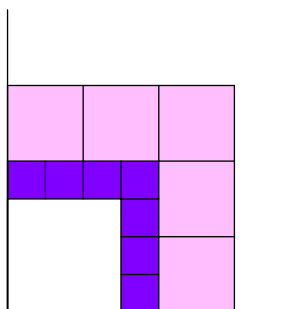


Dlaždice 2 dm a 4 dm pridať nie je možné, pokračovať môžu iba dlaždice 1 dm:



Rozoberme prípady:

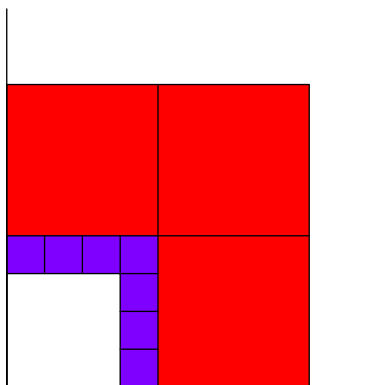
- Nech pokračujú dlaždice 2 dm:



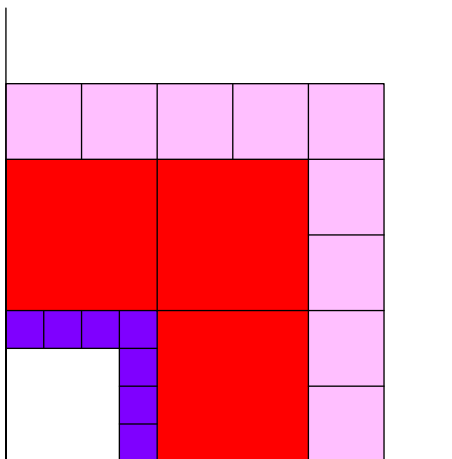
Dlaždice 4 dm však už pridať nie je možné.

Tento prípad teda nevyhovuje.

- Nech pokračujú dlaždice 4 dm:

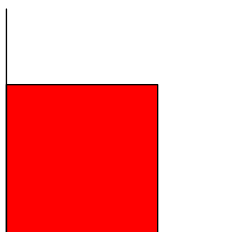


A napokon dlaždice 2 dm:



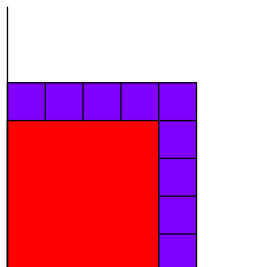
Dostávame tak riešenie. Počet v ňom použitých dlaždíc je $1 + 7 + 3 + 9$ čiže 20.

- Nech má prvá dlaždica stranu 4 dm:



Dlaždice 3 dm pridať nie je možné, pokračovať môžu iba dlaždice 1 dm alebo 2 dm.
Rozoberme prípady:

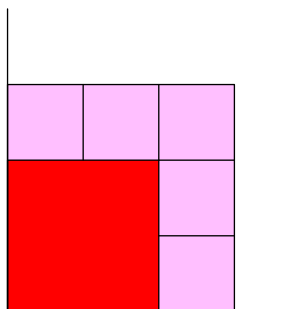
- Nech pokračujú dlaždice 1 dm:



Dlaždice 2 dm ani 3 dm už však pridať nie je možné.

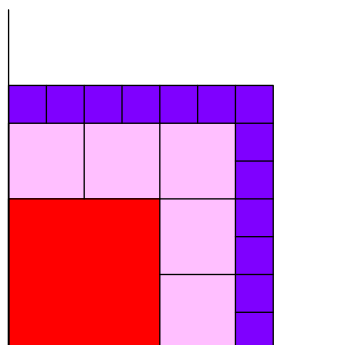
Tento prípad teda nevyhovuje.

- Nech pokračujú dlaždice 2 dm:



Rozoberme prípady:

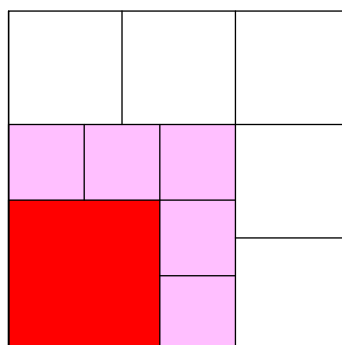
- Nech pokračujú dlaždice 1 dm:



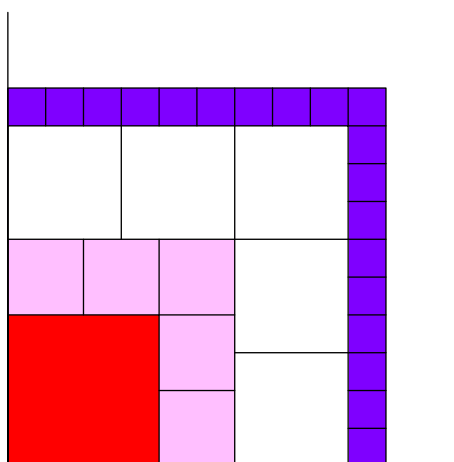
Dlaždice 4 dm už však pridať nie je možné.

Tento prípad teda nevyhovuje.

- Nech pokračujú dlaždice 3 dm:



A napokon dlaždice 1 dm:



Dostávame tak riešenie. Počet v ňom použitých dlaždíc je $1 + 5 + 5 + 19$ čiže 30.

Existujú teda dve vyhovujúce dláždenia:

- Dievčatá sú v poradí Bianka, Viola, Karmen, Ruženka a počet dlaždíc je 20.
- Dievčatá sú v poradí Karmen, Ruženka, Bianka, Viola a počet dlaždíc je 30.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - autori za SK MO: Monika Dillingerová, Iveta Jančígová, Marián Macko
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajčí, Erika Novotná
 - preklad: Erika Novotná