**67. ročník Matematickej olympiády**
**2017/2018**

*Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

**1.** *Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako rozdiel $O - X$, pričom $O$ je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krúžkov ako krížikov a $X$ je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krížikov ako krúžkov.*

*a) Dokážte, že pre tabuľku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.*

*b) Určte najvyššie možné skóre dosiahnuteľné pre tabuľku $(2n+1) \times (2n+1)$ v závislosti od $n$.*

(*Josef Tkadlec*)

**Riešenie.** a) V celej časti a) budeme uvažovať ľubovoľné opísané vyplnenie tabuľky $2 \times n$, ktoré je (vzhľadom na párny počet $2n$ všetkých políčok) tvorené $n$ krížikmi a $n$ krúžkami. Najskôr dokážeme, že v jednom z oboch jej riadkov prevažujú krížiky práve vtedy, keď v tom druhom prevažujú krúžky. Oba riadky dokopy tak do výsledného skóre $O - X$ prispejú nulou.

Označme $x_1$, $x_2$ počty krížikov v prvom, resp. druhom riadku. Podľa prvej vety nášho riešenia platí $x_1 + x_2 = n$. Predpokladajme, že $x_1 > n/2$, že teda v prvom riadku prevažujú krížiky. Potom $x_2 = n - x_1 < n - n/2 = n/2$, takže v druhom riadku naopak prevažujú krúžky. Podobne z $x_2 > n/2$ vyplýva $x_1 < n/2$. Dokázali sme, že ak v jednom z riadkov prevažujú krížiky, potom v tom druhom prevažujú krúžky. Analogicky možno ukázať, že ak v jednom z riadkov prevažujú krúžky, tak v tom druhom prevažujú krížiky.

Teraz dokážeme, že všetkých $n$ stĺpcov tabuľky (každý o dvoch políčkach) súhrnne do výsledného skóre $O - X$ tiež prispieva nulou. Na to označme $x$, $r$, $o$ počty stĺpcov, ktoré obsahujú dva krížiky (a žiadny krúžok), resp. jeden krížik (a jeden krúžok), resp. dva krúžky (a žiadny krížik). Ako vieme, tabuľka obsahuje celkom $n$ krížikov aj $n$ krúžkov, takže platí $n = 2x + r$ a súčasne $n = r + 2o$. Porovnaním dostaneme rovnosť $x = o$, ktorá nám hovorí, že počet stĺpcov, v ktorých prevažujú krížiky, je rovný počtu stĺpcov, v ktorých prevažujú krúžky. Aj stĺpce tak do výsledného skóre $O - X$ tabuľky $2 \times n$ dokopy prispievajú nulou, a riešenie časti a) je tak ukončené.

b) Pre dané $n$ uvažujme ľubovoľné opísané vyplnenie tabuľky $(2n+1) \times (2n+1)$. Keďže počet $2n+1$ políčok v každom riadku a stĺpci je nepárne číslo, v každom z nich bude jedna z oboch značiek prevažovať. Aj počet $(2n+1)^2$ políčok v celej tabuľke je nepárne číslo, takže všetkých krúžkov je o 1 menej ako všetkých krížikov, je ich teda $\frac{1}{2}\bigl((2n+1)^2 - 1\bigr) = 2n(n+1)$. Preto je tých riadkov, v ktorých krúžky prevažujú (t. j. sú tam v počte aspoň $n+1$), nanajvýš $2n(n+1) : (n+1) = 2n$, teda naopak krížiky prevažujú aspoň v jednom riadku. Rovnako tak vysvetlíme, že krúžky prevažujú v nanajvýš $2n$ stĺpcoch a krížiky naopak aspoň v jednom. Dokopy to znamená, že $O \leqq 2n + 2n = 4n$ a $X \geqq 1 + 1 = 2$, takže výsledné skóre $O - X$ nemôže byť väčšie ako $4n - 2$.

Teraz dokážeme, že skóre $4n - 2$ možno (pre každé $n$) dosiahnuť. Z úvahy predchádzajúceho odseku vyplýva, kedy $2n(n+1)$-prvková podmnožina $M$ políčok tabuľky $(2n+1) \times (2n+1)$ s vpísanými krúžkami bude príkladom želaného vyplnenia: v $2n$ riadkoch a $2n$ stĺpcoch bude po $n+1$ políčkach z $M$, zvyšný riadok a zvyšný stĺpec budú bez políčok z $M$. Zrejme stačí jednu takú množinu $M$ nájsť, lebo vhodným vpisovaním krížikov a krúžkov možno dosiahnuť to, aby políčka s krúžkami vytvorili vopred danú

$2n(n+1)$-prvkovú množinu $M$ – stačí písať v akomkoľvek poradí „krížiky mimo $M$ a krúžky do $M$“.

Vyhovujúci príklad pre tabuľku $7 \times 7$ (keď $n = 3$) vidíme na obr. 1. Pre všeobecné $n$ vyzerá obdobná konštrukcia $2n(n+1)$-prvkovej množiny $M$ takto: V poslednom riadku a poslednom stĺpci tabuľky $(2n+1) \times (2n+1)$ nevyberieme do $M$ žiadne políčko; v riadkoch a stĺpcoch zvyšného štvorca $2n \times 2n$ v ľavom hornom „rohu“ pôvodnej tabuľky vyberieme po $n+1$ políčkach nasledovne: v prvom riadku skupinu prvých $n+1$ políčok, ktorú v každom nasledujúcom riadku posunieme oproti predošlému riadku o 1 miesto doprava, pritom políčka z posledného stĺpca tejto podtabuľky presúvame do stĺpca prvého. Toto pravidlo bude platiť aj pre prechod z posledného riadka k riadku prvému, takže vybraných bude $n+1$ políčok nielen v každom riadku, ale aj v každom stĺpci (všeobecnejšia procedúra je opísaná v návodnej úlohe N1).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ○ | × | × | × |
| × | ○ | ○ | ○ | ○ | × | × |
| × | × | ○ | ○ | ○ | ○ | × |
| ○ | × | × | ○ | ○ | ○ | × |
| ○ | ○ | × | × | ○ | ○ | × |
| ○ | ○ | ○ | × | × | ○ | × |
| × | × | × | × | × | × | × |

Obr. 1

Nakoniec poznamenajme, že dokázaná rovnosť $\max(O - X) = 4n - 2$ platí aj pre $n = 0$, pretože tabuľka $1 \times 1$ má jediné vyplnenie (jedným krížikom) s hodnotami $O = 0$ a $X = 2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre každé dve kladné celé čísla $k \leqq n$ možno všetky políčka tabuľky $n \times n$ ofarbiť čierno a bielo tak, aby sa v každom riadku a každom stĺpci nachádzalo presne $k$ čiernych políčok. [Skupinu $k$ čiernych políčok vyberme v prvom riadku tabuľky ľubovoľne. V každom ďalšom riadku posunieme čierne políčka o 1 miesto doprava v porovnaní s aktuálnym riadkom, pritom políčka z posledného stĺpca presúvame do stĺpca prvého. Dostaneme tak vyhovujúce ofarbenie, pretože ak označíme čierne políčka v prvom riadku číslami 1 až $k$ a ak ich zachováme pri posunoch políčok v ďalších riadkoch, z úvahy o počte posunov medzi ľubovoľnými dvoma riadkami nám vyplynie, že v každom stĺpci tabuľky bude nakoniec práve po jednom políčku s číslami 1 až $k$.]

D1. Určte najvyššie možné skóre $O - X$ zo súťažnej úlohy dosiahnuteľné pre tabuľku $2n \times 2n$ v závislosti na $n$. [Pre $n = 1$ vyjde 0, pre $n = 2$ vyjde 2, pre $n \geqq 3$ vyjde $4n - 8$.]

---

**2.** *Dokážte, že ak je súčet dvoch daných reálnych čísel $a$, $b$ väčší ako 2, má sústava nerovníc*

$$(a-1)x + b < x^2 < ax + (b-1)$$

*nekonečne veľa riešení $x$ v obore reálnych čísel.* (Jaromír Šimša)

**Riešenie.** Danú sústavu nerovníc zapíšeme ako

$$F(x) > 0 \ \wedge \ G(x) < 0, \tag{1}$$

pričom $F(x) = x^2 - (a-1)x - b$ a $G(x) = x^2 - ax - b + 1$. Všimnime si, že pre každé $x$ platí $F(x) - G(x) = x - 1$.

Podmienka úlohy $a + b > 2$ znamená, že

$$F(1) = G(1) = 2 - a - b < 0,$$

takže číslo 1 nie je riešením danej sústavy. Nerovnosť $G(1) < 0$ však znamená, že kvadratická rovnica $G(x) = 0$ má jeden koreň väčší ako 1, ten označíme $x_0$: $G(x_0) = 0$ a $x_0 > 1$. Potom

$$F(x_0) = F(x_0) - 0 = F(x_0) - G(x_0) = x_0 - 1 > 0.$$

Teraz z nerovností $F(1) < 0$ a $F(x_0) > 0$ vyplýva existencia koreňa $x_1$ rovnice $F(x) = 0$ v otvorenom intervale $(1, x_0)$: $F(x_1) = 0$ a $1 < x_1 < x_0$. Zo všeobecne známych vlastností kvadratickej funkcie (s kladným koeficientom pri $x^2$) potom vyplýva, že vďaka nerovnostiam

$$F(1) < 0 \ \wedge\ F(x_1) = 0, \quad \text{resp.} \quad G(1) < 0 \ \wedge\ G(x_0) = 0$$

je sústava (1) splnená pre každé $x$ z intervalu $(x_1, x_0)$, pritom druhá nerovnosť $G(x) < 0$ platí dokonca na väčšom intervale $(1, x_0)$. Dôkaz je hotový.

**Iné riešenie.** Trojčleny $F$ a $G$ z prvého riešenia majú diskriminanty

$$D_F = (a-1)^2 + 4b = a^2 - 2a + 4b + 1 \quad \text{a} \quad D_G = a^2 - 4(1-b) = a^2 + 4b - 4, \qquad (2)$$

ktoré sú vďaka podmienke $a + b > 2$ (použitej v tvare $b > 2 - a$) kladné:

$$\begin{aligned} D_F &= a^2 - 2a + 4b + 1 > a^2 - 2a + 4(2-a) + 1 = (a-3)^2 \geqq 0,\\ D_G &= a^2 + 4b - 4 > a^2 + 4(2-a) - 4 = (a-2)^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

Navyše z toho vyplývajú nerovnosti

$$\sqrt{D_F} > |a-3| \quad \text{a} \quad \sqrt{D_G} > |a-2|. \qquad (3)$$

Záver úlohy o sústave nerovníc vyplynie z poradia koreňov oboch prislúchajúcich rovníc

$$\frac{(a-1) - \sqrt{D_F}}{2} < \frac{a - \sqrt{D_G}}{2} < \frac{(a-1) + \sqrt{D_F}}{2} < \frac{a + \sqrt{D_G}}{2},$$

ktoré teraz dokážeme. (V skutočnosti prvú nerovnosť zľava nepotrebujeme, ale vyjde nám ako vedľajší produkt pri dôkaze ostatných troch nerovností.) Je zrejmé, že zapísaná štvorica nerovností je ekvivalentná s dvojicou

$$\sqrt{D_F} + \sqrt{D_G} > 1 \quad \text{a} \quad \left|\sqrt{D_F} - \sqrt{D_G}\right| < 1. \qquad (4)$$

Prvá z týchto nerovností (na rozdiel od druhej) vyplýva z (3) okamžite:

$$\sqrt{D_F} + \sqrt{D_G} > |a-3| + |a-2| \geqq |(a-3) - (a-2)| = 1$$

vďaka známej trojuholníkovej nerovnosti $|u \pm v| \leqq |u| + |v|$. Pre dôkaz druhej nerovnosti v (4) vynásobíme obe jej strany kladným výrazom $\sqrt{D_F} + \sqrt{D_G}$ a dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$|D_F - D_G| < \sqrt{D_F} + \sqrt{D_G}.$$

Keďže $D_F - D_G = 5 - 2a$ podľa (2), je našou poslednom úlohou dokázať nerovnosť

$$|5 - 2a| < \sqrt{D_F} + \sqrt{D_G}.$$

To je jednoduché:

$$|5 - 2a| = \left|(3-a) + (2-a)\right| \leqq |3-a| + |2-a| < \sqrt{D_F} + \sqrt{D_G},$$

pritom sme opäť využili trojuholníkovú nerovnosť a odhady (3).

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nech $a > 0$, $b$ a $c < 0$ sú reálne čísla. Dokážte, že rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má jeden kladný a jeden záporný koreň. [Buď využite iba nerovnosti $a > 0$ a $c < 0$, pričom $c$ je hodnota uvažovaného trojčlena v nule, alebo zapíšte známe vzorce pre korene a prihliadnite na nerovnosť $D = b^2 - 4ac > b^2$.]

D1. Dokážte, že ak reálne čísla $a$, $b$, $c$ spĺňajú $c(a+b+c) < 0$, tak rovnica $ax^2+bx+c = 0$ má riešenie $x$ v intervale $(0, 1)$. [Ak označíme $f(x) = ax^2 + bx + c$, tak $f(0) \cdot f(1) < 0$, teda jedna z hodnôt $f(0)$, $f(1)$ je kladná a druhá je záporná.]

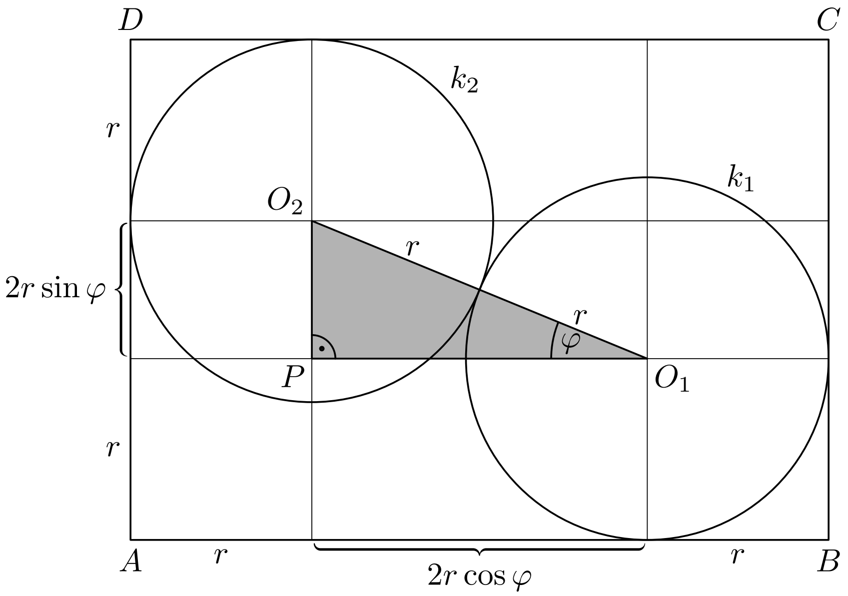
D2. Predpokladajme, že pre trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$ s reálnymi koeficientmi $a$, $b$, $c$ nemá rovnica $f(x) = x$ žiadne riešenie v obore reálnych čísel. Dokážte, že ho nemá ani rovnica $f(f(x)) = x$. [Platí buď $f(x) > x$ pre všetky $x$, alebo $f(x) < x$ pre všetky $x$, preto tiež platí buď $f(f(x)) > f(x) > x$ pre všetky $x$, alebo $f(f(x)) < f(x) < x$ pre všetky $x$.]

---

**3.** *V rovine sú dané dve zhodné kružnice s polomerom 1, ktoré majú vonkajší dotyk. Uvažujme pravouholník obsahujúci obe kružnice, ktorého každá strana sa dotýka aspoň jednej z nich. Určte najväčší a najmenší možný obsah takého pravouholníka.*

(Jaroslav Švrček)

**Riešenie.** Nech $k_1$, $k_2$ sú dve zhodné kružnice s polomerom $r = 1$ so stredmi postupne $O_1$, $O_2$, ktoré majú vonkajší dotyk. Nech $ABCD$ je pravouholník vyhovujúci podmienkam úlohy (strany $AB$ a $BC$ uvažovaného pravouholníka sú dotyčnicami kružnice $k_1$ a strany $CD$ a $DA$ sú dotyčnicami kružnice $k_2$). Zo zadania je zrejmé, že stredy oboch kružníc ležia vnútri hľadaného pravouholníka. Označme ďalej $P$ priesečník priamok vedených stredom $O_1$ rovnobežne so stranou $AB$ a stredom $O_2$ rovnobežne so stranou $BC$ (obr. 2). Označme ešte $\varphi$ veľkosť uhla $PO_1O_2$. Vzhľadom na symetriu zadania stačí uvažovať iba hodnoty $\varphi \in \langle 0; \frac{1}{4}\pi \rangle$.




Obr. 2

Pre skúmaný obsah $S$ pravouholníka $ABCD$ podľa obr. 2 platí

$$S = |AB| \cdot |BC| = (2r + 2r\cos\varphi)(2r + 2r\sin\varphi) = 4(1 + \sin\varphi)(1 + \cos\varphi)$$

(dosadili sme hodnotu $r = 1$). Teraz určíme najmenšiu a najväčšiu hodnotu obsahu $S$ s premenným uhlom $\varphi \in \langle 0; \frac{1}{4}\pi \rangle$. Na to stačí určiť najmenšiu a najväčšiu hodnotu výrazu (funkcie)

$$V(\varphi) = (1 + \sin\varphi)(1 + \cos\varphi) \qquad \text{pre } \varphi \in \langle 0; \tfrac{1}{4}\pi \rangle.$$

Tento predpis funkcie najskôr upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$V(\varphi) = 1 + \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = \tfrac{1}{2} + (\sin\varphi + \cos\varphi) + \tfrac{1}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)^2.$$

Všetko teda závisí od hodnoty $u = \sin\varphi + \cos\varphi$. Ukážeme, že pre ľubovoľné $\varphi \in \langle 0; \frac{1}{4}\pi \rangle$ je $1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$. Keďže pre také $\varphi$ je súčet $\sin\varphi + \cos\varphi$ zrejme kladný, môžeme namiesto hľadania minimálnej a maximálnej hodnoty výrazu $u$ hľadať minimálnu a maximálnu hodnotu výrazu $u^2$ (na rovnakom intervale). Platí

$$u^2 = \sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi = 1 + \sin 2\varphi.$$

Z toho vzhľadom na nerovnosť $0 \leqq \sin 2\varphi \leqq 1$ vyplýva

$$1 \leqq u^2 \leqq 2, \qquad \text{teda} \qquad 1 \leqq u \leqq \sqrt{2},$$

pričom $u = 1$ práve vtedy, keď $\varphi = 0$, a $u = \sqrt{2}$ práve vtedy, keď $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.

Keďže kvadratická funkcia $V(u) = \frac{1}{2} + u + \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(u+1)^2$ je na intervale $\langle 1; \sqrt{2} \rangle$ rastúca, platia pre každé dotyčné $u$ nerovnosti

$$2 = V(1) \leqq V(u) \leqq V(\sqrt{2}) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2},$$

ktoré už vedú k potrebným odhadom obsahu $S = 4V(\varphi)$:

$$8 \leqq S \leqq 6 + 4\sqrt{2}. \tag{1}$$

Najmenšia hodnota $S$ vo vzťahu (1) je pritom dosiahnutá práve vtedy, keď $\varphi = 0$, t. j. v prípade, keď strany $AB$ a $CD$ hľadaného pravouholníka $ABCD$ sú dotyčnicami oboch daných kružníc $k_1$ a $k_2$ a súčasne strany $BC$ a $DA$ sú postupne dotyčnicami iba kružníc $k_1$ a $k_2$. Jedná sa teda o prípad, keď hľadaným „opísaným“ pravouholníkom (podľa podmienok úlohy) je obdĺžnik so stranami 4 a 2, ktorého obsah je naozaj 8. Podobne najväčšia hodnota $S$ vo vzťahu (1) je dosiahnutá práve vtedy, keď $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, t. j. v prípade, keď hľadaným „opísaným“ pravouholníkom je štvorec $ABCD$ s obsahom $6 + 4\sqrt{2}$, na ktorého uhlopriečke $BD$ budú ležať stredy oboch daných kružníc.

*Odpoveď.* Najmenší možný obsah je 8, najväčší $6 + 4\sqrt{2}$.

**Iné riešenie.** Označme $a = |PO_1|$, $b = |PO_2|$ dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka $O_1O_2P$ (ktorý môže prípadne degenerovať na jednu z úsečiek $PO_1$ či $PO_2$). Zároveň z Pytagorovej vety máme $a^2 + b^2 = 4r^2 = 4$ (čo opäť platí, aj keď je jedna z hodnôt $a$, $b$ nulová). Obsah $S$ opísaného pravouholníka $ABCD$ potom môžeme vyjadriť (vďaka rozdeleniu úsečkami na deväť menších pravouholníkov v obr. 2) ako

$$S = 4r^2 + 2r(a + b) + ab = 4 + 2(a + b) + ab. \tag{2}$$

Ak teraz využijeme nerovnosti

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqq a+b \leqq \sqrt{2(a^2+b^2)} \quad \text{a} \quad 0 \leqq ab \leqq \frac{a^2+b^2}{2},$$

ktoré zrejme platia pre ľubovoľné nezáporné čísla $a$ a $b$, získame pre obsah $S$ podľa (2) odhady

$$4+2\cdot 2+0=8 \leqq S \leqq 4+2\cdot 2\sqrt{2}+2=6+4\sqrt{2}.$$

Minimálnu hodnotu $S=8$ tak dostaneme pre $ab=0$, teda pre obdĺžnik, ktorého dve strany budú rovnobežné s úsečkou $O_1O_2$, a maximálnu hodnotu $S=6+4\sqrt{2}$ pre $a=b=\sqrt{2}$, teda pre štvorec, ktorého uhlopriečka bude obsahovať body $O_1$, $O_2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Do rovnostranného trojuholníka so stranou 1 sú vpísané tri zhodné kružnice, z ktorých každá sa zvonka dotýka zvyšných dvoch kružníc a súčasne sa dotýka práve dvoch strán tohto trojuholníka. Určte polomer týchto troch kružníc. [$\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$. Hľadaný polomer $r$ spĺňa $2r+2r\operatorname{cotg}30^\circ=1$.]

N2. Dokážte, že pre každé $x \in \mathcal{R}$ platí $-\sqrt{2} \leqq \sin x+\cos x \leqq \sqrt{2}$. [Buď dokazujte ekvivalentnú nerovnosť $(\sin x+\cos x)^2 \leqq 2$, alebo využite úpravu na výraz s hodnotou $\sin(x+\frac{1}{4}\pi)$.]

N3. Pre dané kladné čísla $x \neq y$ uvažujme priemery

$$a=\frac{x+y}{2},\ g=\sqrt{xy},\ h=\frac{2xy}{x+y},\ k=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jedná sa o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický priemer čísel $x$ a $y$.) Zo všetkých rozdelení štvorice $a$, $g$, $h$, $k$ na dve dvojice $r$, $s$ a $t$, $u$ vyberte to rozdelenie, pre ktoré má výraz $V=rs-tu$ najmenšiu kladnú hodnotu. [44–B–I–3]

D1. V obdĺžniku $ABCD$ so stranami $|AB|=9$, $|BC|=8$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$ tak, že $k_1$ sa dotýka strán $AD$ a $CD$, $k_2$ sa dotýka strán $AB$ a $BC$.

a) Dokážte, že $r_1+r_2=5$.

b) Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu obsahu trojuholníka $AS_1S_2$.

[62–A–S–1]

---

**4.** *Nájdite najväčšie prirodzené číslo $n$ také, že hodnota súčtu*

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

*je prvočíslo. Zápis $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako $x$.*

(*Patrik Bak*)

**Riešenie.** Uvažujme nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel $a_n=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Táto postupnosť je zrejme neklesajúca, a keďže

$$k=\sqrt{k^2}<\sqrt{k^2+1}<\ldots<\sqrt{k^2+2k}<\sqrt{k^2+2k+1}=k+1,$$

obsahuje každé prirodzené číslo $k$ presne $(2k+1)$-krát. Taký popis uvažovanej postupnosti nám už postačí na určenie zadaných súčtov $s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$ nasledujúcim spôsobom.

Pre ľubovoľné prirodzené $n$ označme $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, čiže $n = k^2 + l$ pre vhodné $l \in \{0, 1, \dots, 2k\}$. Potom podľa predchádzajúceho popisu platí

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{k-1} i(2i+1) + k(l+1) = 2\sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i + k(l+1) = \\ &= 2\frac{(k-1)(k-1+1)(2(k-1)+1)}{6} + \frac{(k-1)(k-1+1)}{2} + k(l+1) = \\ &= \frac{(k-1)k(2k-1)}{3} + \frac{k(k-1)}{2} + k(l+1) = \frac{(k-1)k(4k+1)}{6} + k(l+1), \end{aligned}$$

pričom sme využili vzťahy $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ a $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Pre ľubovoľné $k > 6$ zostane hodnota zlomku

$$\frac{(k-1)k(4k+1)}{6}$$

aj po skrátení šiestimi prirodzeným číslom deliteľným niektorým prvočiniteľom $p$ čísla $k$, ktorý samozrejme delí aj ďalšieho sčítanca v odvodenom vyjadrení súčtu $s_n$. Prvočíslo $p$ tak bude deliteľom aj čísla $s_n$, pričom $p \leqq k < s_n$, takže číslo $s_n$ prvočíslom nebude. Riešenie danej úlohy preto stačí hľadať iba medzi takými prirodzenými číslami $n$, pre ktoré $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqq 6$, teda v hre zostávajú iba čísla $n < (6+1)^2 = 49$. Pre $n = 48$ dosadením do odvodeného vzorca pre $s_n$ spočítame $s_{48} = 203$, čo je číslo deliteľné siedmimi. Pre $n = 47$ vyjde $s_{47} = 197$, čo je prvočíslo.

*Odpoveď.* Hľadané číslo je $n = 47$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

N2. Dokážte, že $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

N3. Zistite, koľko celočíselných riešení má rovnica

$$\left\lfloor \sqrt[1\,989]{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[1\,989]{\frac{n+1}{2}} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \sqrt[1\,989]{\frac{n+1\,989}{1\,989}} \right\rfloor = 1\,990.$$

[38–B–II–4]

D1. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 2$ platí

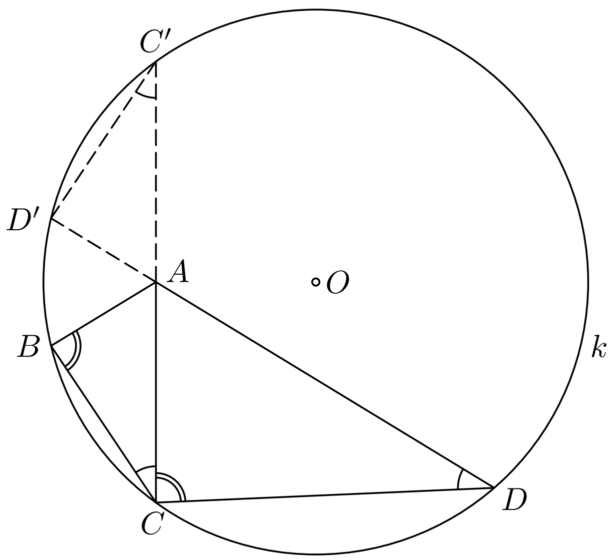
$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \ldots + \lfloor\log_n n\rfloor.$$

[Tabuľku $n \times n$ vyplníme číslami tak, že do políčka v $a$-tom riadku a $b$-tom stĺpci vpíšeme číslo $a^b$ a počet políčok, v ktorých je číslo neprevyšujúce $n$, spočítame dvoma spôsobmi: po stĺpcoch a po riadkoch.]

---

**5.** *V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ACD|$ a $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle ADC|$. Predpokladajme, že stred $O$ kružnice opísanej trojuholníku $BCD$ je rôzny od bodu $A$. Dokážte, že uhol $OAC$ je pravý.* (*Patrik Bak*)

**Riešenie.** Označme $k$ kružnicu opísanú trojuholníku $BCD$. Podľa zadania sa trojuholníky $ABC$ a $ACD$ zhodujú v dvoch vnútorných uhloch (obr. 3), takže platí aj tretia rovnosť $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle CAD|$. Z toho predovšetkým vyplýva, že súčet protiľahlých uhlov pri vrcholoch $A$ a $C$ v danom štvoruholníku $ABCD$ je väčší ako $180°$, preto vrchol $A$ musí ležať vo vnútornej oblasti kružnice $k$.



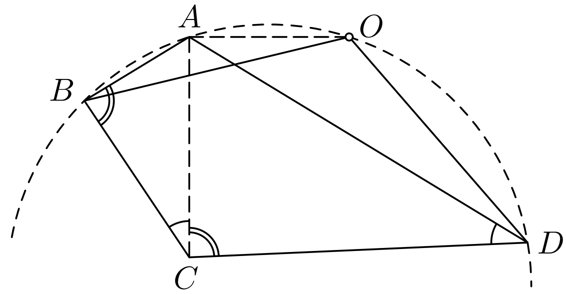

Obr. 3

Predĺžme ako na obrázku úsečky $CA$ a $DA$ na tetivy $CC'$ a $DD'$ kružnice $k$. Zo zhodnosti obvodových uhlov nad jej oblúkom $D'BC$ máme

$$|\measuredangle D'C'C| = |\measuredangle D'DC| = |\measuredangle ADC| = |\measuredangle ACB|,$$

takže $BCC'D'$ je rovnoramenný lichobežník alebo pravouholník (návodná úloha N1). Podobné trojuholníky $ABC$ a $AD'C'$ (pripomeňme, že je tiež $|\measuredangle C'AD'| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle BAC|$) sú tak dokonca zhodné, teda $A$ je stredom základne $CC'$ rovnoramenného trojuholníka $OCC'$, čiže $|\measuredangle OAC| = 90°$, čo sme mali dokázať.

**Iné riešenie.** Skúmajme úlohu z pohľadu trojuholníka $ABD$. Keďže polpriamka $AC$ je os jeho vnútorného uhla pri vrchole $A$, ako už vieme z úvodu prvého riešenia, je $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle CAD| < 90°$. Preto uhol pri vrchole $C$ konvexného štvoruholníka $ABCD$ je tupý, takže stred $O$ kružnice $k$ opísanej trojuholníku $BCD$ leží rovnako ako bod $A$ v polrovine opačnej k polrovine $BDC$ (obr. 4).




Obr. 4

Z vlastností obvodového a stredového uhla tak vyplýva, že veľkosť nekonvexného uhla $BOD$ je dvojnásobkom veľkosti konvexného uhla $BCD$, takže vzhľadom na rovnosť

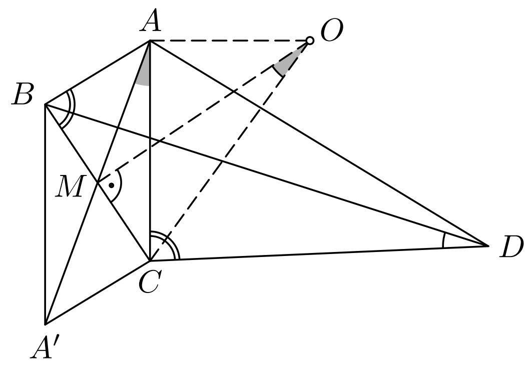
$$|\measuredangle BCD| = |\measuredangle ACB| + |\measuredangle ACD| = |\measuredangle ADC| + |\measuredangle ABC|$$

a pravidlo o súčte vnútorných uhlov štvoruholníka platí

$$|\measuredangle BOD| = 360^\circ - 2|\measuredangle BCD| = 360^\circ - |\measuredangle BCD| - |\measuredangle ADC| - |\measuredangle ABC| = |\measuredangle BAD|.$$

Uhly $BOD$ a $BAD$ sú teda zhodné, takže bod $O$ leží na oblúku $BAD$ kružnice opísanej trojuholníku $ABD$ a ako stred kružnice opísanej trojuholníku $BCD$ má od krajných bodov tohto oblúka rovnakú vzdialenosť. Je preto jeho stredom, takže ako je známe (pozri úlohu N2), leží na osi vonkajšieho uhla pri vrchole $A$ trojuholníka $ABD$. Tvrdenie úlohy tak vyplýva z toho, že polpriamky $AC$ a $AO$ sú osami dvojice susedných uhlov, ktoré sú vždy navzájom kolmé.

**Iné riešenie.** Označme $M$ stred základne $BC$ rovnoramenného trojuholníka $OBC$ (obr. 5). Keďže $|\measuredangle OMC| = 90^\circ$, na dôkaz rovnosti $|\measuredangle OAC| = 90^\circ$ stačí ukázať, že body $O$, $A$, $M$, $C$ ležia na kružnici (Tálesovej kružnici nad priemerom $OC$). Z vlastností stredových a obvodových uhlov v kružnici opísanej trojuholníku $BCD$ vyplýva $|\measuredangle MOC| = \frac{1}{2}|\measuredangle BOC| = |\measuredangle BDC|$, takže stačí dokázať zhodnosť uhlov $BDC$ a $MAC$, pretože to dokopy zaručí, že body $A$ a $O$ ležia na tom istom kružnicovom oblúku nad tetivou $CM$. (Že body $A$ a $O$ ležia v tej istej polrovine určenej priamkou $BD$, už vieme z predchádzajúceho riešenia, kde sme ukázali, že uhol $BCD$ je tupý.)




Obr. 5

Označme $A'$ obraz bodu $A$ v stredovej súmernosti podľa bodu $M$. Potom je $ABA'C$ rovnobežník a želaná zhodnosť uhlov vyplynie z podobnosti trojuholníkov $AA'C$ a $DBC$, ktorú teraz dokážeme použitím vety *sus* so zameraním na spoločný vrchol $C$. Platí $|\measuredangle A'CB| = |\measuredangle ABC|$, takže $|\measuredangle A'CA| = |\measuredangle BCD|$. K tomu z podobnosti trojuholníkov $ABC$ a $ACD$ vyplýva $|AC|/|CA'| = |AC|/|AB| = |DC|/|CB|$, čím je dôkaz hotový.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ak v tetivovom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC|$, je $AB \parallel CD$ a $|BC| = |AD|$. Dokážte. [Dokážte, že trojuholníky $ABC$ a $BAD$ sú súmerne združené podľa osi tetivy $AB$ opísanej kružnice.]

N2. Daný je trojuholník $ABC$ vpísaný do kružnice $k$. Označme $D$ stred oblúka $BC$ kružnice $k$ obsahujúceho bod $A$. Dokážte, že v prípade $A \neq D$ je priamka $AD$ osou vonkajšieho uhla trojuholníka $ABC$ pri vrchole $A$. [Nech napr. $|AB| < |AC|$. Potom polpriamka $AD$ delí uhol $CAX$, pričom $X$ je bod na predĺžení strany $AB$ za vrchol $A$, na dva uhly: jeden je uhol $DAC$ zhodný s uhlom $DBC$, druhý je vonkajší uhol pri vrchole $A$ tetivového štvoruholníka $ABCD$, zhodný s protiľahlým vnútorným uhlom $BCD$.]

D1. Na stranách $AB$, $AC$ rôznostranného trojuholníka $ABC$ sú dané postupne body $X$, $Y$ tak, že $|BX| = |CY| = d > 0$. Dokážte, že os úsečky $XY$ prechádza pevným bodom nezávislým na $d$. [Je to stred $M$ oblúka $BAC$: trojuholníky $XBM$ a $YCM$ sú zhodné podľa vety *sus*.]

**6.** *Nájdite najväčší možný počet prvkov množiny $M$ celých čísel, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: Z každej trojice rôznych čísel z $M$ možno vybrať niektoré dve, ktorých súčet je mocninou čísla 2 s celočíselným exponentom.* (Ján Mazák)

**Riešenie.** Poznamenajme na úvod, že spomenutá mocnina ako celočíselný súčet musí mať nezáporný exponent. Iba také mocniny čísla 2 budeme ďalej uvažovať.

Dokážeme, že množina $M$ môže mať nanajvýš 6 prvkov, ako má napríklad vyhovujúca (ako vzápätí overíme) množina

$$\{-1, 3, 5, -2, 6, 10\}.$$

Súčet ľubovoľných dvoch čísel z trojice $-1$, 3, 5 je totiž mocninou dvoch a to isté platí pre trojicu $-2$, 6, 10. Akokoľvek z uvedenej množiny vyberieme tri čísla, budú niektoré dve z nich patriť jednej z oboch spomenutých trojíc, a tieto dve čísla tak budú mať súčet rovný mocnine dvoch.

Teraz pripusťme, že existuje vyhovujúca množina s viac ako šiestimi prvkami. Keby množina $M$ obsahovala tri nekladné čísla, bol by súčet každých dvoch z nich záporný, každá mocnina dvoch je však kladná. Preto množina $M$ obsahuje nanajvýš dve nekladné čísla, a teda aspoň päť kladných čísel. Označme $x$ najväčšie z nich a $a$, $b$, $c$, $d$ nejaké štyri ďalšie kladné čísla z $M$.

Uvažujme štyri súčty $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$. Všetky sú väčšie ako $x$ a menšie ako $2x$. V intervale $(x, 2x)$ však môže ležať nanajvýš jedna mocnina dvoch, takže nanajvýš jeden z týchto štyroch súčtov je rovný mocnine dvoch a zvyšné tri (bez ujmy na všeobecnosti $x + a$, $x + b$, $x + c$) mocninami dvoch nie sú. Použitím podmienky úlohy na trojice $(a, b, x)$, $(a, c, x)$ a $(b, c, x)$ tak zistíme, že všetky tri súčty $a + b$, $a + c$ a $b + c$ musia byť mocniny dvoch. Bez ujmy na všeobecnosti nech $a = \max\{a, b, c\}$. Podobne ako vyššie sa zamerajme na otvorený interval $(a, 2a)$. V ňom leží nanajvýš jedna mocnina dvoch, súčasne v ňom však ležia obe (rôzne) čísla $a + b$ aj $a + c$, o ktorých sme už usúdili, že musia byť mocninami dvoch. Dospeli sme tak k želanému sporu.

*Odpoveď.* Najväčší možný počet prvkov množiny $M$ je rovný 6.

**Iné riešenie.** Uvedieme iný dôkaz, že neexistuje vyhovujúca množina $M$ s aspoň siedmimi prvkami, ktorý využíva základné pojmy z teórie grafov[1].

Zrejme stačí ukázať, že žiadna sedemprvková množina $M$ celých čísel požadované vlastnosti nemá. Pripusťme, že taká množina $M$ existuje, a jej prvky si predstavme ako vrcholy istého grafu $G$. V ňom dva vrcholy spojíme hranou, ak je súčet čísel, ktoré predstavujú, mocninou dvoch. Podmienka zo zadania úlohy hovorí, že v takto zostavenom grafe sú medzi každými tromi vrcholmi niektoré dva spojené hranou. O grafe $G$ so siedmimi vrcholmi uvedieme najskôr niekoľko pozorovaní.

(1) Graf $G$ neobsahuje kružnicu dĺžky 4.

*Dôkaz.* Pripusťme, že graf $G$ takú kružnicu $a_1a_2a_3a_4$ obsahuje, takže pre vhodné celé nezáporné čísla $\alpha_i$ platí

$$a_1 + a_2 = 2^{\alpha_1},\ a_2 + a_3 = 2^{\alpha_2},\ a_3 + a_4 = 2^{\alpha_3},\ a_4 + a_1 = 2^{\alpha_4}.$$

[1] Pozri napr. Petr Hliněný, Základy teorie grafů, Elportál MU, Brno, URL: `is.muni.cz/elportal/?id=878389`

Bez ujmy na všeobecnosti možno predpokladať, že $a_1 = \min\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ a že $a_2 < < a_4$. Potom číslo $\alpha_1$ je menšie ako ktorékoľvek z troch (nie nutne rôznych) čísel $\alpha_2$, $\alpha_3$ a $\alpha_4$, takže najvyššia mocnina dvoch, ktorá delí súčet $2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_3}$, je menšia ako najvyššia mocnina dvoch, ktorá delí súčet $2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_4}$. To je však v spore s tým, že oba súčty sú rovné tomu istému číslu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Graf $G$ teda naozaj neobsahuje kružnicu dĺžky 4.

(2) Každý vrchol grafu $G$ má stupeň aspoň 3.

*Dôkaz.* Pre spor predpokladajme, že existuje vrchol $v$ stupňa nanajvýš 2. Potom niektoré štyri zo siedmich vrcholov $G$ nie sú s $v$ spojené hranou; označme ich $a$, $b$, $c$, $d$. Použitie podmienky úlohy na trojice $(v, a, b)$, $(v, b, c)$, $(v, c, d)$, $(v, d, a)$ implikuje existenciu hrán $ab$, $bc$, $cd$ a $da$, ktoré však tvoria kružnicu dĺžky 4, čo je v spore s (1).

(3) Niektorý vrchol grafu $G$ má stupeň aspoň 4.

*Dôkaz.* V každom grafe určite platí, že súčet stupňov všetkých vrcholov je rovný dvojnásobku počtu hrán. Špeciálne to znamená, že toto číslo je párne. Pri grafe so siedmimi vrcholmi tak nie je možné, aby každý vrchol mal stupeň presne 3 (stupeň menší ako tri je vylúčený podľa (2)).

Dokázané pozorovania o našom grafe $G$ využijeme nasledovne. Označme $v$ jeden jeho vrchol stupňa aspoň 4 a $a$, $b$, $c$, $d$ niektoré štyri jeho susedné vrcholy. Keďže tie majú stupne aspoň 3, z každého z nich vychádzajú aspoň dve hrany, ktoré nesmerujú do vrcholu $v$. Pozdĺž každej takej hrany nakreslíme šípku. Tak získame aspoň $4 \cdot 2 = 8$ šípok, teda aspoň dve z nich smerujú do toho istého vrcholu rôzneho od vrcholu $v$ (zopakujme, že do neho nesmeruje žiadna z nakreslených šípok). Koncové vrcholy takých dvoch šípok spolu s vrcholom $v$ tvoria kružnicu dĺžky 4, čo je želaný spor.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Rozhodnite, či existujú tri prirodzené čísla $x > y > z$ také, že $x+y$ aj $x+z$ sú mocniny dvoch. [Uvážte, koľko rôznych mocnín dvoch môže ležať v intervale medzi číslami $x$ a $2x$ pre dané prirodzené $x$.]

N2. Na večierku má každý človek nepárny počet známych („poznanie sa“ je vzájomné). Dokážte, že počet ľudí na večierku je párny. [Súčet všetkých počtov známych jednotlivých osôb je rovný dvojnásobku počtu všetkých dvojíc osôb, ktoré sa poznajú, takže to je číslo párne.]

D1. Každú stranu a uhlopriečku pravidelného šesťuholníka sme ofarbili červenou alebo modrou. Dokážte, že existuje trojuholník s vrcholmi vo vrcholoch pôvodného šesťuholníka, ktorého všetky tri strany majú rovnakú farbu. [Dôkaz tohto prvotného výsledku tzv. Ramseyho teórie nájdete v prehľadovom článku J. Šimša, Ramseyova čísla a jeich uplatnění v geometrii, URL: `mfi.upol.cz/old/MFI_17_pdf/Mat_17_10.pdf`.]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

| | |
|---|---|
| Autori: | Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf |
| Recenzenti: | Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný |
| Redakčná úprava: | Peter Novotný, Ján Mazák |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017 |