65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
Celoštátne kolo kategória A
Riešenie úloh

1) Bainbridgeov hmotnostný spektrometer

Riešenie:

a) Ak sa ión vo filtri pohybuje priamočiaro pozdĺž osi, je výsledná priečna sila nulová, a teda sila elektrického poľa je v rovnováhe so silou magnetického poľa

$$e\,E = e\,v\,B\,,$$

odkiaľ máme rýchlosť iónu $v_1 = \dfrac{E}{B} = \dfrac{U}{B\,d} \approx 7{,}5\times10^4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

b) Po prechode štrbinou Š pôsobí na ión iba sila magnetického poľa

$$m\boldsymbol{a} = e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\,.$$

Keďže je sila kolmá na smer pohybu, nekoná prácu a pohyb je rovnomerný. Zrýchlenie má preto iba dostredivú zložku $m\dfrac{v^2}{R} = e\,v\,B\,,$

odkiaľ dostávame polomer krivosti trajektórie $R = \dfrac{m\,v}{e\,B}$.

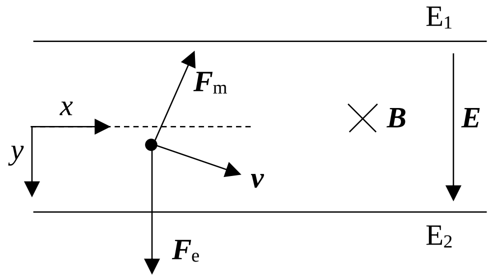
Keďže sú všetky veličiny v zlomku konštantné, a teda i polomer krivosti R je konštantný. Ide teda o pohyb po kružnici.

Vzdialenosť dopadu iónu na detekčnú plochu

$$r = 2\,R = \frac{2\,m\,v_1}{e\,B} = \frac{2\,m\,U}{e\,d\,B^2} \approx 45\ \text{cm}.$$

c) Vo filtri pôsobí na časticu sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$ elektrického a sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$ magnetického poľa

$$m\boldsymbol{a} = e\,\boldsymbol{E} + e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\,.$$



Obr. RA–xx

Pohybovú rovnicu rozložíme na pozdĺžnu (x) a priečnu (y) zložku

$$m\,a_x = \ \ e\,v_y\,B \qquad (1)$$

$$m\,a_y = e\,E - e\,v_x\,B\,. \qquad (2)$$

Rovnicu (2) derivujeme

$$m\,\dot{a}_y = -e\,\dot{v}_x\,B = -e\,B\,a_x\ \ ,$$

a dosadíme za a_x do (1)

$$m\,\dot{a}_y = -\frac{B^2\,e^2}{m}\,v_y\,,\ \text{resp.}\ \ddot{v}_y + \left(\frac{B\,e}{m}\right)^2 v_y = 0\,, \qquad (3)$$

čo je rovnica harmonických kmitov pre premennú v_y s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \frac{e\,B}{m} \approx 3{,}35\times10^5\ \mathrm{s^{-1}}. \qquad (4)$$

Vyjadríme priečnu rýchlosť v_y v tvare harmonickej funkcie

$$v_y(t) = v_{ym}\sin(\omega t + \alpha). \qquad (5)$$

Na vyjadrenie v_x použijeme rovnicu (2) do ktorej dosadíme zrýchlenie a_y získané derivovaním rýchlosti v_y

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t} = \omega\, v_{ym}\cos(\omega t + \alpha).$$

Po dosadení a s použitím (4) máme

$$v_x(t) = \frac{E}{B} - v_{ym}\cos(\omega t + \alpha) = v_1 - v_{ym}\cos(\omega t + \alpha). \qquad (6)$$

Na začiatku pre $t = 0$ je $v_x(0) = v_2$, $a_y(0) = e\,E - e\,v_2\,B$ a $v_y(0) = y_m \sin\alpha = 0$, kde amplitúda $y_m > 0$.

Odtiaľ máme $\sin\alpha = 0$, tzn. $\alpha = 0$ alebo π.

Podľa (2) $\omega\, v_{ym}\cos\alpha = \dfrac{e\,E - e\,v_2\,B}{m} = \omega\,(v_1 - v_2)$.

Ak $v_2 < v_1$ je $\cos\alpha > 0$, tzn. $\alpha = 0$ a $\cos\alpha = 1$.

Pre $v_2 > v_1$ je $\cos\alpha < 0$, tzn. $\alpha = \pi$, a teda $\cos\alpha = -1$.

i) Pre $v_2 < v_1$, a teda $\alpha = 0$, máme $v_{ym} = v_1 - v_2$

$v_y(t) = (v_1 - v_2)\sin\omega t$, a teda

$$y = \int_0^t v_y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t (v_1 - v_2)\sin\omega t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}(v_1 - v_2)(\cos\omega t - 1) = \frac{v_1 - v_2}{\omega} - \frac{v_1 - v_2}{\omega}\cos\omega t.$$

Pre x–zložku (6) máme

$v_x(t) = v_1 - (v_1 - v_2)\cos\omega t$, a teda

$$x = \int_0^t v_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \left[v_1 - (v_1 - v_2)\cos\omega t\right]\mathrm{d}t = v_1\,t - \frac{v_1 - v_2}{\omega}\sin\omega t.$$

Ide o pohyb po kružnici s polomerom $R = \dfrac{|v_1 - v_2|}{\omega}$ so stredom vo vzdialenosti R od osi x, ktorá postupuje rýchlosťou v_1 v smere osi x. Na elektródu E_2 ióny nedopadnú, ak $2R < d/2$, tzn.

$$\frac{|v_1 - v_2|}{\omega} < \frac{d}{4},$$

odkiaľ dostávame rozsah rýchlostí

$$v_1 - \frac{d\,\omega}{4} < v_2 < v_1 - \frac{d\,\omega}{4}$$

Ióny nedopadnú na elektródy filtra, ak do neho vstupujú rýchlosťou

$$\frac{U}{Bd} - \frac{eBd}{4m} < v_2 < \frac{U}{Bd} + \frac{eBd}{4m}.$$

Pre dané hodnoty $v_2 \in (7{,}48 \div 7{,}52)\times 10^4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2) Zóna ohrozenia

Riešenie:

Let kamienka predstavuje šikmý vrh, pre ktorý platia vzťahy

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g\,t$$

$$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 ,$$

kde v_0 je začiatočná rýchlosť vrhu a α uhlo vrhu vzhľadom na vodorovnú rovinu poľa.

a) V prvom prípade ide o zásah miesta na povrchu poľa, tzn. vo výške $y = 0$. Z rovnice pre výšku y určíme čas dopadu t_d a ten dosadíme do vzdialenosti dopadu $x = x_\mathrm{d}$

$$y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 = 0 \text{, odkiaľ máme } t_\mathrm{d} = \frac{2 v_0}{g} \sin\alpha \text{, a potom}$$

$$x_\mathrm{d} = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \,.$$

Minimálna bezpečná vzdialenosť vrany na poli, tzn. maximálna vzdialenosť doletu kamienka (pre $2\alpha = 90°$),

$$d_\mathrm{min} = \frac{v_0^2}{g} \,.$$

b) Pre bod zásahu dostávame

$$x_\mathrm{z} = v_0\, t_\mathrm{z} \cos\alpha \,, \qquad y_\mathrm{z} = v_0\, t_\mathrm{z} \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t_\mathrm{z}^2 \,.$$

Po vylúčení času zásahu dostávame rovnicu

$$y_\mathrm{z} = v_0 \frac{x_\mathrm{z}}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_\mathrm{z}}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 .$$

Pre zvolený bod vyjadríme uhol vrhu. Na jeho určenie rovnicu upravíme na tvar

$$y_\mathrm{z} = x_\mathrm{z} \tan\alpha - \frac{1}{2} \frac{g\, x_\mathrm{z}^2}{v_0^2} \left(1 + \tan^2\alpha \right)$$

a po úprave

$$\tan^2\alpha - \frac{2 v_0^2}{g\, x_\mathrm{z}} \tan\alpha + \frac{2 v_0^2\, y_\mathrm{z}}{g\, x_\mathrm{z}^2} + 1 = 0 \,.$$

Rovnica má riešenie

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{g\, x_\mathrm{z}} \pm \sqrt{ \left(\frac{v_0^2}{g\, x_\mathrm{z}} \right)^2 - \left(\frac{2 v_0^2\, y_\mathrm{z}}{g\, x_\mathrm{z}^2} + 1 \right) } \,.$$

Ak je diskriminant záporný, zvoleným bodom nemôže prechádzať žiadna trajektória, a teda bod nemožno zasiahnuť. Hranica oblasti bodov, ktoré možno zasiahnuť vyjadruje podmienka $D = 0$

$$x_\mathrm{z} = x_\mathrm{min} = \sqrt{ \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2 y_\mathrm{z} \right) } \,.$$

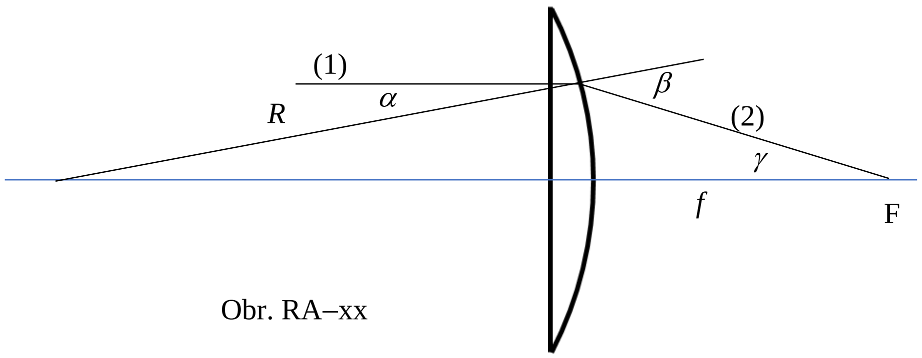
c) Ak letí vrana vo výške h, nemala by sa dostať okolo chlapca do kruhu s polomerom

$$r = \sqrt{ \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2h \right) } \text{, pre dané hodnoty } r \approx 136 \text{ m.}$$

3) Polomer krivosti šošovky

Riešenie:

a) Na obr. RA–xx je znázornený lúč (1), ktorý dopadá kolmo na ploskú stranu šošovky. Na vypuklej strane sa láme a lúč (2) pretína optickú os v ohnisku F. V obrázku sú označené veličiny R – polomer krivosti vypuklého povrchu a f – ohnisková vzdialenosť šošovky.



Obr. RA–xx

Pre geometrické veličiny platí

$$R\sin\alpha = f\tan\gamma \quad \text{a} \quad \beta = \gamma + \alpha .$$

Podľa zákona lomu máme

$$\sin\beta = n\sin\alpha .$$

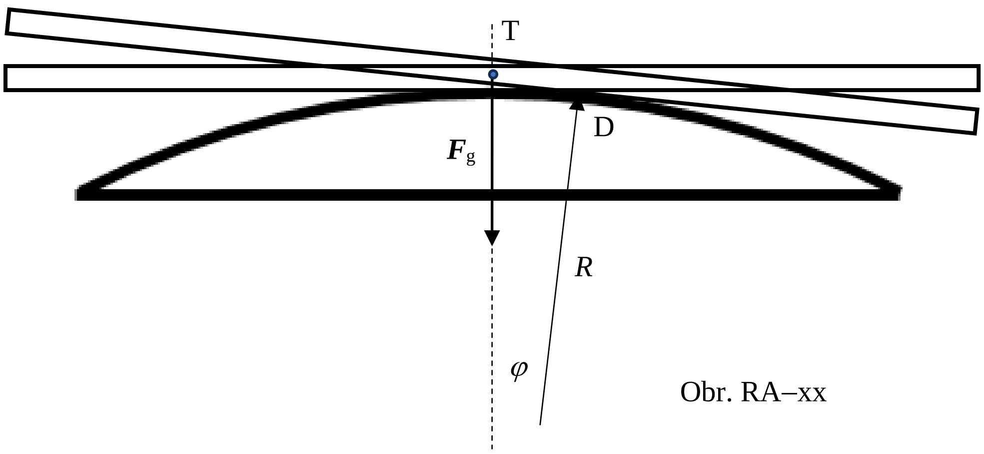
Ak pre tenkú šošovku uvážime približné vzťahy pre malé uhly

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin\beta \approx \beta, \quad \tan\gamma \approx \gamma,$$

dostávame vzťah pre ohniskovú vzdialenosť šošovky

$$f = \frac{R}{n-1} .$$

b) Obr. RA–xx



Obr. RA–xx

Po vychýlení tyčky o malý uhol φ sa posunie bod dotyku do bodu D o $x = R\varphi$, obr. RA–xx, pričom ťažisko T sa vychýli iba v zvislom smere o $y = x\sin\varphi$.

Pohybová rovnica tyčky

$$J\ddot{\varphi} = M ,$$

kde $J = J_0 + m x^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + m R^2 \varphi^2$, pre $\varphi \to 0$ je $J \approx \frac{1}{12} m \ell^2$

$$M = -mg\,x = -m\,g\,R\varphi .$$

Potom

$$\frac{1}{12} m \ell^2\, \ddot{\varphi} = -m\,g\,R\varphi \text{, resp. } \ddot{\varphi} = -\frac{12\,g\,R}{\ell^2}\varphi = -\,\omega^2\varphi ,$$

kde

$$\omega = \frac{2}{\ell}\sqrt{3\,g\,R} = \frac{2\pi}{T} .$$

a perióda kmitov

$$T = \pi \frac{\ell}{\sqrt{3\,g\,R}} .$$

c) Z odvodených vzťahov dostávame polomer zakrivenie šošovky

$$R = \frac{\pi^2 \ell^2}{3\,g\,T^2} \approx 27 \text{ cm}$$

a vzťah pre výpočet indexu lomu

$$n = 1 + \frac{R}{f} = 1 + \frac{\pi^2 \ell^2}{3\,g\,f\,T^2} \approx 1{,}60.$$

4) Beta žiarič

Riešenie:

a) Rovnica premeny

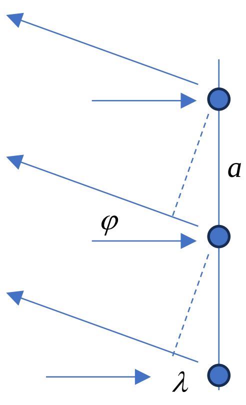
$$^{60}_{27}\mathrm{Co} \to {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + \mathrm{e}^- + \gamma_1 + \gamma_2 \left(+\bar{\nu}_\mathrm{e}\right) .$$

Vlnové dĺžky

$$E = \frac{h\,c}{\lambda} \text{, odkiaľ } \lambda = \frac{h\,c}{E}, \; \lambda_1 \approx 1{,}06 \text{ pm}, \; \lambda_2 \approx 0{,}933 \text{ pm}.$$

b) Elektróny sa správajú ako vlnenie s vlnovou dĺžkou λ. Elektróny postupujúce k doštičke DIF predstavujú rovinnú vlnu, ktorá sa odráža od povrchových atómov (aj od nižších vrstiev). Vlna elektrónov sa z jednotlivých atómov odráža vo všetkých smeroch, ale pod uhlom φ dochádza ku konštruktívnej interferencii, ako ukazuje obr. RA–1. Zo zosilnenia vĺn interferenciou vyplýva, že vlny odrazené pod uhlom φ sú vo fáze, teda

$$\lambda = a \sin\varphi \;\approx\; 1{,}90 \text{ pm}.$$



Obr. RA–1

c) Príslušná vlnová dĺžka zodpovedá hybnosti elektrónu

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{a \sin\varphi} .$$

Vyjadríme hybnosť ako funkciu rýchlosti

$$p=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v\,,$$

odkiaľ máme

$$v=c\frac{h}{\sqrt{h^2+\left(mca\sin\varphi\right)^2}}\approx 0{,}787\,c\approx 2{,}36\times10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Kinetická energia β–elektrónov vznikajúcich premenou

$$E_\mathrm{k}=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}-mc^2=c\sqrt{\left(\frac{h}{a\sin\varphi}\right)^2+m^2c^2}-mc^2\ \approx\ 5{,}09\times10^{-14}\ \mathrm{J}\approx 318\ \mathrm{keV}.$$

d) Základná rovnica premeny

$$N=N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

a aktivita

$$A=-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\frac{\ln 2}{T}N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T}t}=A_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T}t}\,,$$

pričom

$$\frac{A}{A_0}=\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T}t}=1-\eta\,,$$

odkiaľ máme

$$T=-\frac{\ln 2}{\ln\left(1-\eta\right)}t\ \approx\ 5{,}27\ \text{roka.}$$

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – teoretické úlohy celoštátneho kola kat. A

Autori úloh: Ivo Čáp, Ľubomír Konrád

Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Úlohy preložil: Aba Teleki

Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024