63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

Kategória D

Krajské kolo – riešenie úloh

1) Automobil

Riešenie:

a) Ide o rovnomerne spomalený pohyb. Dráha automobilu

(1) $s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$. Pre dané hodnoty s_1 = 105 m.

Rýchlosť automobilu

(2) $v = v_0 - a t$. Pre dané hodnoty $v_1 \approx 22$ km·h^{-1}.

b) Z rovníc (1) a (2) vylúčime čas t a vyjadríme rýchlosť

(3) $s = v_0 \frac{v_0 - v}{a} - \frac{1}{2} \frac{(v_0 - v)^2}{a} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$, odkiaľ

$v = \sqrt{v_0^2 - 2 a s}$. Pre dané hodnoty $v \approx 11$ km·h^{-1}.

Nie, automobil nestihne zastaviť pred prekážkou.

c) Zo vzťahu (3) pre v = 0 dostávame

$d_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2a}$. Pre dané hodnoty $d_\mathrm{m} \approx 125$ m.

d) Hranice intervalu označíme t_3, t_4. Priemernú rýchlosť môžeme určiť ako pomer dráhy v tomto časovom intervale a času

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3} = \frac{1}{t_4 - t_3}\left[\left(v_0 t_4 - \frac{1}{2} a t_4^2\right) - \left(v_0 t_3 - \frac{1}{2} a t_3^2\right)\right] = v_0 - \frac{1}{2} a (t_4 + t_3).$$

Pre dané hodnoty $v_\mathrm{p} \approx 7{,}4$ m·s^{-1} ≈ 26 km·h^{-1}.

Iný postup s rovnakým výsledkom:

Hranice intervalu označíme t_3, t_4 a zodpovedajúce rýchlosti v_3, v_4. Keďže sa rýchlosť mení rovnomerne (konštantné zrýchlenie), je priemerná rýchlosť v tomto intervale

$$v_\mathrm{p} = \frac{v_3 + v_4}{2} = \frac{(v_0 - a t_3) + (v_0 - a t_4)}{2} = v_0 - \frac{a}{2}(t_4 + t_3).$$

e) Vyjadríme dráhu, ktorú prejde automobil počas daného intervalu

(4) $s_3 = s_6 - s_5 = \left(v_0 t_6 - \frac{1}{2} a t_6^2\right) - \left(v_0 t_5 - \frac{1}{2} a t_5^2\right) = v_0 (t_6 - t_5) - \frac{1}{2} a \left(t_6^2 - t_5^2\right) = \Delta t \left[v_0 - \frac{1}{2} a (t_6 + t_5)\right].$

Odtiaľ vyjadríme súčet časov

(5) $t_6 + t_5 = \frac{2}{a}\left(v_0 - \frac{s_3}{\Delta t}\right).$

Zároveň platí

(6) $t_6 - t_5 = \Delta t$.

Po sčítaní oboch rovníc (5) a (6) dostaneme po úprave

$$t_6 = \frac{1}{a}\left(v_0 - \frac{s_3}{\Delta t}\right) + \frac{\Delta t}{2} \text{ a potom } t_5 = t_6 - \Delta t.$$

Pre dané hodnoty $t_5 \approx 6{,}3$ s a $t_6 \approx 10{,}3$ s.

Pozn.: Iný spôsob odvodenia vzťahu (4)

Dráhu s_3 prejde automobil na dobu Δt priemernou rýchlosťou $v_{p1} = (v_5 + v_6)/2$ a platí

$$s_3 = v_{p1}\,\Delta t = \frac{v_5 + v_6}{2}\,\Delta t = \frac{(v_0 - a t_5) + (v_0 - a t_6)}{2}\,\Delta t = \left[v_0 - \frac{a}{2}(t_5 + t_6)\right]\Delta t\,.$$

2) Guľa vo vode

Riešenie:

a) Označíme V objem gúľ a m_1, m_2 hmotnosti ťažšej a ľahšej gule.

Po vložení do prázdnej nádoby pôsobí ťažšia guľa na dno svojou tiažou

$$F = m_1\,g\,.$$

Po doplnení vody za tiaž zmenší o vztlakovú silu

$$F_1 = F - \rho V g = p_1\,F \text{ , kde } p_1 = 2/3.$$

Pre druhú guľu plávajúcu vo vode platí

$$m_2\,g = \rho\left(p_2 V\right) g \text{ , kde } p_2 = 2/3.$$

Prvá úvaha:

Ak by zostala sústava gúľ plávať, platilo by

$$\left(m_1 + m_2\right) g = \left(V + p_3 V\right)\rho\,g \text{ , kde } p_3 < 1 \text{ je ponorená časť ľahšej gule.}$$

Po dosadení za hmotnosti dostávame

$$p_3 = \frac{1}{1 - p_1} + p_2 - 1 = \frac{8}{3}\text{, čo je v rozpore s predpokladom } p_3 \le 1.$$

Sústava preto nezostane plávať, ale ťažšia guľa zostane na dne.

Druhá úvaha:

Ak zostane prvá guľa na dne, je jej tlaková sila na dno $F_T > 0$, pričom platí

$$\left(m_1 + m_2\right) g = F_T + 2V\rho\,g\,.$$

Po dosadení za hmotnosti

$$F_T = \left[1 - \left(2 - p_2\right)\left(1 - p_1\right)\right] F = \frac{5}{9}F\,.$$

Keďže $F_T > 0$, nastane druhý prípad, kedy zostane celá sústava ponorená pod hladinou vody.

b) Prvá guľa zostane na dne a na dno pôsobí tlakovou silou $F_T = \frac{5}{9}F \approx 5{,}6$ N.

Druhá guľa zostane ponorená celá, tzn. $p_3 = 1$.

c) Po ponorení celej sústavy platí pre rovnováhu síl na druhú guľu

$$m_2\,g + F_V = \rho V g\,,$$

odkiaľ dostávame

$$F_V = \left(1 - p_2\right)\left(1 - p_1\right) F\,.\text{ Pre dané hodnoty } F_V \approx 1{,}11 \text{ N.}$$

3) Hranol na stole

Riešenie:

a) Ak po uvoľnení závažia zostane sústava v pokoji, je ťahová sila vlákna $F_{v1} = m_2\, g$. Táto sila musí byť menšia ako maximálna hodnota statického trenia

$m_2\, g \le f\, m_1\, g$, a teda $m_2 \le f\, m_1 = m_{2m}$. Pre dané hodnoty $m_{2m} \approx 30$ g.

b) Ak je $m_2 > m_{2m}$, sústava sa začne pohybovať s konštantným zrýchlením

$$a_1 = \frac{m_2\, g - F_t}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - f\, m_1}{m_1 + m_2}\, g \,,$$

kým neprekoná dráhu h_0 za dobu

$t_1 = \sqrt{\frac{2 h_0}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 h_0}{g}}\, \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2 - f\, m_1}}$. Pre dané hodnoty $t_1 \approx 0{,}87$ s

c) Počas zrýchleného pohybu na dráhe h_0 dosiahne hranol rýchlosť

$v_0 = a_1\, t_1 = \sqrt{2 h_0\, g}\, \sqrt{\frac{m_2 - f\, m_1}{m_1 + m_2}}$. Pre dané hodnoty $v_0 \approx 0{,}69$ m·s^{-1}.

Potom pokračuje spomaleným pohybom pôsobením trenia so zrýchlením

$$a_2 = -\, f\, g \,.$$

Dráha a rýchlosť pohybu

$$s = v_0\, t + \frac{1}{2} a_2\, t^2 \quad \text{a} \quad v = v_0 + f\, g\, t \,.$$

Čas zastavenia $t_2 = \frac{v_0}{f\, g}$ dosadíme do vzťahu pre dráhu

$$s_2 = v_0\, t_2 + \frac{1}{2} a_2\, t_2^2 = \frac{v_0^2}{2 f\, g} = \frac{h_0}{f}\, \frac{m_2 - f\, m_1}{m_1 + m_2} \,.$$

Celková dráha hranola na stole

$d = h_0 + s_2 = h_0\, \frac{1 + f}{f}\, \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Pre dané hodnoty $d \approx 46$ cm.

4) Zrážka

Riešenie:

a) Mincu brzdí sila trenia $F_T = f\, m_2\, g$ a pohybuje sa rovnomerne spomaleným pohybom so zrýchlením

$$a = -\, f\, g.$$

Pre začiatočnú rýchlosť v_{0m} minca zastane práve na konci dosky, tzn. prejde dráhu d

$d = v_{0m}\, t_1 + \frac{1}{2} a\, t_1^2 = v_{0m}\, t_1 - \frac{1}{2} f\, g\, t_1^2$ a $v = v_{0m} - f\, g\, t_1 = 0$, odkiaľ dostávame

$v_{0m} = \sqrt{2 f\, g\, d}$. Pre dané hodnoty $v_{0m} \approx 0{,}99$ m·s^{-1}.

b) Pre pohyb mince platia rovnice

$$d = v_0\, t_2 - \frac{1}{2} f\, g\, t_2^2 \quad \text{a} \quad v_M = v_0 - f\, g\, t_2 \,,$$

odkiaľ určíme po vylúčení času t_2

$$v_{\mathrm{M}} = \sqrt{v_0^2 - 2 f g d} = \sqrt{6 f g d}$$. Pre dané hodnoty $v_{\mathrm{M}} \approx 1{,}71\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Pozn.: Rýchlosť možno určiť aj zo zmeny kinetickej energie

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{\mathrm{M}}^2 = W = F d = f m_2 g d ,$$

alebo

$$\frac{1}{2} m_2 v_{\mathrm{M}}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(2 v_{0\mathrm{m}}\right)^2 - \frac{1}{2} m_2 \left(v_{0\mathrm{m}}\right)^2 \text{, odkiaľ } \quad v_{\mathrm{M}} = \sqrt{3}\, v_{0\mathrm{m}} \approx {}^\circ 1{,}71\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} .$$

c) Po zrážke je rýchlosť gule v_1 a rýchlosť mince v_2, pričom platí zákon zachovania hybnosti a pre pružnú zrážku aj zákon zachovania kinetickej energie

$$m_2 v_{\mathrm{M}} = m_2 v_2 + m_1 v_1 \text{, resp. } \qquad m_2 \left(v_{\mathrm{M}} - v_2\right) = m_1 v_1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{\mathrm{M}}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \text{, resp. } \quad m_2 \left(v_{\mathrm{M}} - v_2\right)\left(v_{\mathrm{M}} + v_2\right) = m_1 v_1^2 .$$

Dosadením prvej rovnice do druhej dostávame rovnicu

$$v_{\mathrm{M}} + v_2 = v_1 . \qquad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) určíme rýchlosť gule po náraze

$$v_1 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_{\mathrm{M}} = \frac{2}{3} \sqrt{6 f g d}$$. Pre dané hodnoty $v_1 \approx 1{,}14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Pri pohybe gule po zrážke platí zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h_{\mathrm{m}} .$$

Maximálna výška

$$h_{\mathrm{m}} = \frac{v_1^2}{2 g} = \frac{4}{3} f d$$. Pre dané hodnoty $h_{\mathrm{m}} \approx 6{,}7$ cm.

63. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Úlohy krajského kola kategórie D***

Autori návrhov úloh:	Kamil Bystrický (1). Ľubomír Konrád (2 až 4)
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2022