63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

Kategória C

Domáce kolo – riešenie úloh

1) Korčuliar

Riešenie:

a) Celkový čas t_c je súčtom času t_1 rovnomerného pohybu a t_2 rovnomerne zrýchleného pohybu so zrýchlením $-a$.

Pre rovnomerne zrýchlený pohyb (so záporným zrýchlením) v druhej časti trate máme

$$s_2 = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{a} \quad v = v_1 - a t \; .$$

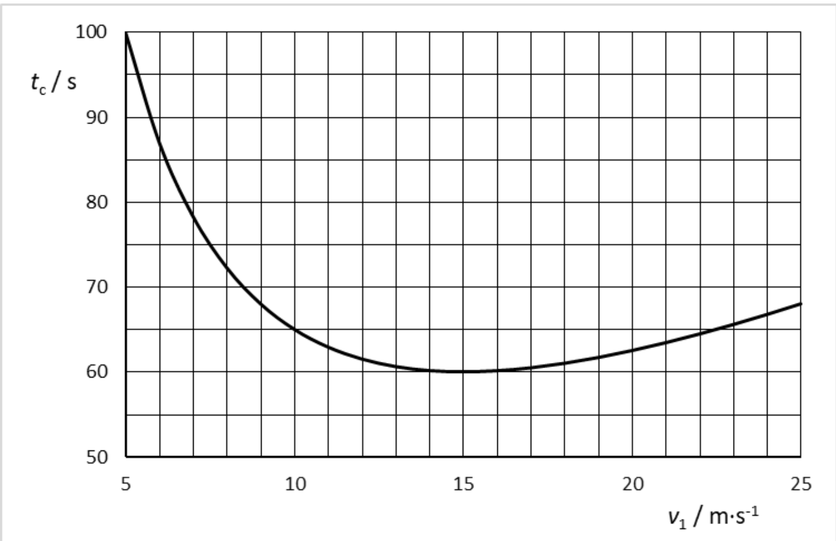
Pre zastavenie platí $v = 0$. Z rovnice pre rýchlosť dostávame

$$t_2 = \frac{v_1}{a} \; .$$

Celkový čas pohybu je potom

$$t_c = \frac{s_1}{v_1} + \frac{v_1}{a} = \frac{s_1 a + v_1^2}{v_1 a} \; .$$

Túto funkciu znázorňuje nasledujúci graf.



Obr. RC–1

Aby sa dosiahla dostatočná presnosť určenia hodnôt v minime funkcie treba obmedziť rozsahy hodnôt na oboch osiach, napr. podľa obrázku alebo ešte užší interval okolo minima. Graf zobrazenej funkcie by mal vypĺňať celú plochu grafu. 4 b

b) Z grafu určíme hodnoty minima funkcie $t_{cm} \approx 60$ s a $v_{1m} = 15$ m/s.

Pozn.: Je možné použiť aj funkciu „Riešiteľ" programu MS EXCEL.

Vzťah pre t_c upravíme na tvar kvadratickej rovnice pre premennú v_1

$$v_1^2 - v_1 t_c a + s_1 a = 0\,.$$

Riešenie rovnice je

$$v_1 = \frac{a t_c \pm \sqrt{a^2 t_c^2 - 4 s_1 a}}{2}\,.$$

Pre jednotlivé hodnoty t_c dostávame vždy dve rôzne hodnoty rýchlosti, iba v jednom prípade je jediné riešenie, keď diskriminant rovnice je nulový, tzn.

$$t_{cm} = 2\sqrt{\frac{s_1}{a}}\text{, pričom } v_{1m} = \frac{a t_{cm}}{2} = \sqrt{s_1 a}\,.$$

Pre dané hodnoty $t_{cm} \approx 60$ s, $v_{1m} \approx 15$ m·s^{-1},
čo zodpovedá výsledkom získaným z grafu. 4 b

c) Pre rýchlosť v_{1m} je celková dráha korčuliara

$$s_{cm} = s_1 + \left(v_{1m} t_1 - \frac{1}{2} a t_2^2 \right) = s_1 + \frac{1}{2}\frac{v_{1m}^2}{a} = s_1 + \frac{1}{2} s_1 = \frac{3}{2} s_1\,.$$

Pre dané hodnoty $s_{cm} \approx 675$ m. 2 b

2) Pluto a Cháron

Riešenie:

Najprv vyjadríme zorné uhly v radiánoch

$$\beta = 0{,}084'' \frac{1^\circ}{3600''}\frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} = 4{,}07\times 10^{-7}\,\text{rad}\text{, podobne } \gamma = 2{,}08\times 10^{-7}\,\text{rad a } \alpha = 3{,}39\times 10^{-6}\,\text{rad.}$$

a) Sústava Pluto – Cháron rotuje okolo spoločného hmotného stredu T s uhlovou rýchlosťou ω. Vzdialenosť telies je d, vzdialenosť Pluta od bodu T je d_P. Určíme vzdialenosť d_P

$$M_P d_P = M_{Ch}\left(d - d_P\right)\text{, odkiaľ máme } d_P = \frac{M_{Ch}}{M_P + M_{Ch}} d\,, \qquad (1)$$

pričom $d \approx R\,\alpha$ (za predpokladu $R_{ZP} \approx R$).

Pohyb telies po kružniciach so stredom T určuje sila vzájomnej príťažlivosti

$$M_P\,\omega^2 d_P = G\frac{M_P M_{Ch}}{d^2} \quad \text{a} \quad M_{Ch}\,\omega^2\left(d - d_P\right) = G\frac{M_P M_{Ch}}{d^2}\,. \qquad (2)$$

Po dosadení (1) do rovnice pre Pluto určíme hmotnosť sústavy

$$M_{PC} = M_P + M_{Ch} = \frac{\omega^2 d^3}{G} = \frac{4\pi^2 d^3}{G T^2}\,.$$

Hmotnosť Zeme určíme z jej polomeru R_Z a zrýchlenia g

$$g = G\frac{M_Z}{R_Z^2}\text{, odkiaľ } M_Z = \frac{g R_Z^2}{G}\,.$$

Hľadaný pomer

$$p = \frac{M_{PC}}{M_Z} = \frac{4\pi^2 d^3}{T^2 g R_Z^2} = \frac{4\pi^2 \left(R\alpha\right)^3}{T^2 g R_Z^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $p \approx 2{,}44\times 10^{-3}$. 5 b

Pozn.: Ak uvážime najkratšiu vzdialenosť Zem-Pluto $R - R_{ZS}$ dostaneme $p \approx 2{,}26\times 10^{-3}$.

b) Určíme objem dvojice telies

$$V_{PC} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_P}{2}\right)^3 + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_{Ch}}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}R^3\left(\beta^3+\gamma^3\right),$$

kde $D_P = R\,\beta$ a $D_{Ch} = R\,\gamma$.

Priemerná hustota telies

$$\rho = \frac{M_{PC}}{V_{PC}} = \frac{24\pi d^3}{GT^2\left(D_P^3 + D_{Ch}^3\right)} = \frac{24\pi\alpha^3}{GT^2\left(\beta^3+\gamma^3\right)}.$$

Pre dané hodnoty $\rho \approx 1{,}89{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. 3 b

c) Podľa 3. Keplerovho zákona pre obežné doby okolo centrálneho telesa (Slnka) platí

$$\left(\frac{R_{PS}}{R_{ZS}}\right)^3 = \left(\frac{T_P}{T_Z}\right)^2, \text{ odkiaľ máme } T_P = \left(\frac{R_{PS}}{R_{ZS}}\right)^{\frac{3}{2}} T_Z,$$

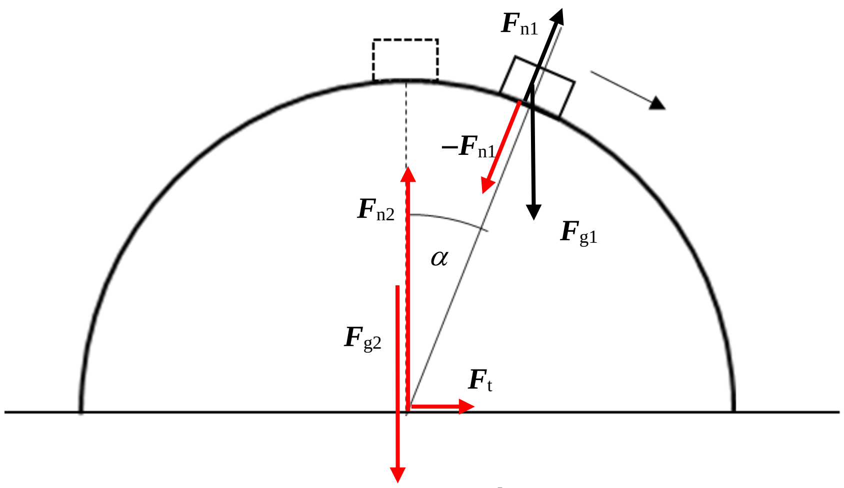
kde T_Z = 365,25 dňa.

Pre dané hodnoty $T_P \approx 8{,}78{\cdot}10^4$ dňa ≈ 240 rokov. 2 b

3) Pohyb s trením

Riešenie:

a)



Obr. RC–2

Opis síl:

<u>Na teliesko pôsobí:</u> 1) tiažová sila $\boldsymbol{F}_{g1}$, 2) tlaková sila polgule $\boldsymbol{F}_{n1}$. Dotyčnicová zložka tiažovej sily $F_{g1}\sin\alpha$ spôsobí zrýchlenie pohybu telieska, tzn. zvyšovanie rýchlosti pohybu. Tým narastá aj dostredivé zrýchlenie, ktoré je dané dostredivou zložkou tiažovej sily zmenšenej o normálovú tlakovú silu, t.j. silou $F_{g1}\cos\alpha - F_{n1}$. S rastom dostredivého zrýchlenia klesá tlaková sila až na nulovú hodnotu, kedy sa teliesko od povrchu polgule oddelí a pokračuje voľným pohybom (šikmým vrhom) k podložke.

<u>Na polguľu pôsobí:</u> 1) tiažová sila $\boldsymbol{F}_{g2}$, 2) tlaková sila telieska $-\boldsymbol{F}_{n1}$, 3) tlaková sila podložky $\boldsymbol{F}_{n2}$ a 4) trecia sila $\boldsymbol{F}$, medzi polguľou a podložkou. Kým je polguľa v pokoji, vodorovná zložka tlakovej sily telieska $F_{n1}\sin\alpha$ je kompenzovaná silou trenia F_t. Polguľa sa pohne, ak sila $F_{n1}\sin\alpha$ prekročí hodnotu maximálneho statického trenia $f\,F_{n2}$. 2 b

b) V smere kolmom na povrch polgule, v rovine pohybu telieska platí pohybová rovnica

$$m\frac{v^2}{R} = m\,g\,\cos\alpha - F_{n1}\,. \qquad (1)$$

Keďže neuvažujeme trenie medzi telieskom a polguľou, zachováva sa mechanická energia telieska, tzn. nadobudnutá kinetická energia telieska je rovná zmene potenciálnej energie telieska

$$\frac{1}{2}mv^2 = m\,g\,R\,(1-\cos\alpha)\,. \qquad (2)$$

Určíme maximálny uhol α_{max}, pri ktorom teliesko stráca kontakt s polguľou. Tento uhol je daný podmienkou $F_{n1} = 0$. Z rovníc (1) a (2) dostávame

$\cos\alpha_{max} = \frac{2}{3}$, odkiaľ $\alpha_{max} = 48{,}2°$. 2 b

c) Ak polguľa stojí, pôsobí na ňu sila statického trenia $F_t \le f\,F_{n2}$. Polguľa sa pohne, ak sila trenia prekročí túto hodnotu. Určíme faktor trenia f pre hraničnú podmienku statického trenia $F_t = f\,F_{n2}$. Výslednica síl v zvislom smere je nulová, tzn. platí

$$F_{n2} = M\,g + F_{n1}\cos\alpha_p \qquad (3)$$

a vo vodorovnom smere

$$F_t = F_{n1}\sin\alpha_p\,. \qquad (4)$$

Z uvedených rovníc vyjadríme silu trenia

$$F_t = m\,g\left(3\cos\alpha_p - 2\right)\sin\alpha_p$$

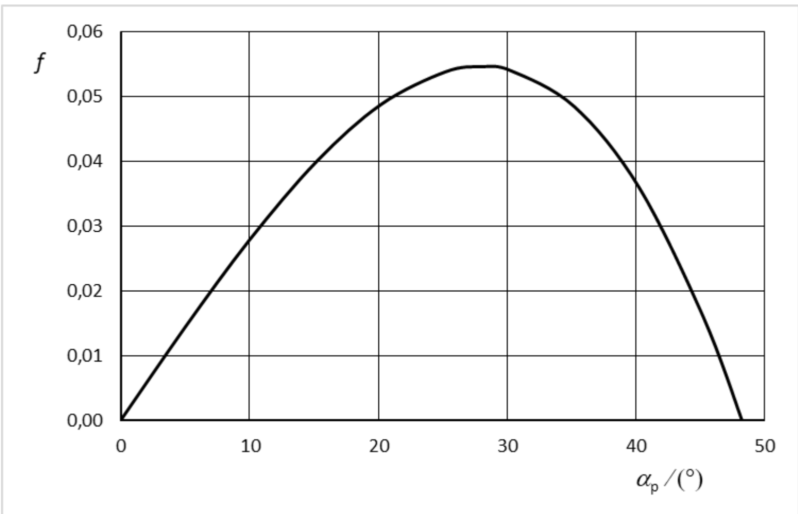
a normálovú silu

$$F_{n2} = M\,g - m\,g\,\left(2-3\cos\alpha_p\right)\cos\alpha_p\,.$$

Hľadaný faktor statického trenia

$$f = \frac{\left(3\cos\alpha_p - 2\right)\sin\alpha_p}{p + \left(3\cos\alpha_p - 2\right)\cos\alpha_p} = \mathrm{f}\,(\alpha_p)\,.$$ 2 b

d) Graf f ako funkcie α_p. Graf zostrojíme pre interval $0 \le \alpha_p \le \alpha_{max}$. (Pre uhly $\alpha > \alpha_{max}$ pohyb polgule nemôže nastať, lebo teliesko už na polguľu nepôsobí)



Z grafu určíme maximálnu hranicu faktoru trenia, pre ktorý môže k pohybu polgule dôjsť $f_m \approx 0{,}55$, a uhol $\alpha_m \approx 28°$. 2 b

Poznámka:
Maximum možno nájsť, ak vieme derivovať. Keďže derivácia funkcie predstavuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie, vo vrchole (maxime) je nulová. Maximum preto môžeme nájsť pomocou nulovej derivácie funkcie $f = \mathrm{f}(\alpha_\mathrm{p})$. Derivácia funkcie má tvar

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha_\mathrm{p}} = \frac{\left[3\left(\cos^2\alpha_\mathrm{p} - \sin^2\alpha_\mathrm{p}\right) - 2\cos\alpha_\mathrm{p}\right]\left[p + \left(3\cos\alpha_\mathrm{p} - 2\right)\cos\alpha_\mathrm{p}\right] + 2\left(3\cos\alpha_\mathrm{p} - 2\right)\left(3\cos\alpha_\mathrm{p} - 1\right)\sin^2\alpha_\mathrm{p}}{\left[p + \left(3\cos\alpha_\mathrm{p} - 2\right)\cos\alpha_\mathrm{p}\right]^2} .$$

Ak položíme čitateľ rovný nule, dostaneme po úprave kvadratickú rovnicu

$$3\cos^2\alpha_\mathrm{m}\left(3 + 2p\right) - 2\cos\alpha_\mathrm{m}\left(p + 6\right) + 4 - 3p = 0 ,$$

ktorá má riešenie

$$\cos\alpha_\mathrm{m} = \frac{\left(p+6\right) \pm \sqrt{19\,p^2 + 15\,p}}{6\left(2p+3\right)}$$, fyzikálny význam má $\cos\alpha_\mathrm{m} > 0$, tzn. znamienko (+).

Pre daný pomer hmotností $p = 5$ dostávame $\alpha_\mathrm{m} \approx 27{,}95°$, čo súhlasí s hodnotou určenou z grafu.

e) Pre $f_1 = 0{,}04$ dôjde k pohybu polgule pri dosiahnutí uhlu $\alpha_{\mathrm{p}1} \approx 15{,}2°$. Pre faktor $f_2 = 0{,}06$ k pohybu polgule nedôjde. 2 b

4) Plyn v spojených nádobách

Riešenie:

a) Pre jednotlivé plyny platí stavová rovnica ideálneho plynu

$$p_1 V = n_1 R T_1 \quad \text{a} \quad p_2 V = n_2 R T_2 ,$$

odkiaľ máme

$$T_1 = \frac{p_1 V}{n_1 R} \quad \text{a} \quad T_2 = \frac{p_2 V}{n_2 R} .$$

Pre dané hodnoty $T_1 \approx 301$ K, $t_1 \approx 27{,}5$ °C, $T_2 \approx 401$ K, $t_2 \approx 127{,}8$ °C. 4 b

b) Po otvorení ventilu plyny prenikajú do druhej nádoby s nulovým parciálnym tlakom príslušného plynu. Keďže sú plyny tepelne izolované od okolia, ich celková vnútorná energia sa nezmení. Keďže dochádza k zmene teploty plynov v dôsledku vyrovnávania teploty v sústave, je zmena vnútornej energie plynov rovnaká ale opačného znamienka

$$C_{V1}\,(T_1 - T_3) = -\,C_{V2}\,(T_2 - T_3),$$

kde tepelné kapacity

$$C_{V1} = \frac{3}{2} n_1 R ,\ \ C_{V2} = \frac{5}{2} n_2 R .$$

(Jednoatómový plyn He má $s = 3$ stupne voľnosti, dvojatómový N_2 má $s = 5$)

Z predchádzajúcich rovníc určíme výslednú teplotu zmesi plynov

$$T_3 = \frac{3\,n_1 T_1 + 5\,n_2 T_2}{3\,n_1 + 5\,n_2} .$$

Pre dané hodnoty $T_3 \approx 372$ K, $t_3 \approx 99{,}3$ °C. 3 b

Tlak zmesi plynov je súčtom parciálnych tlakov jednotlivých zložiek

$$p_3 = \frac{n_1 R T_3}{2V} + \frac{n_2 R T_3}{2V} = \left(n_1 + n_2\right)\frac{R T_3}{2V} = \frac{n_1 + n_2}{2}\,\frac{3\,p_1 + 5\,p_2}{3\,n_1 + 5\,n_2} .$$

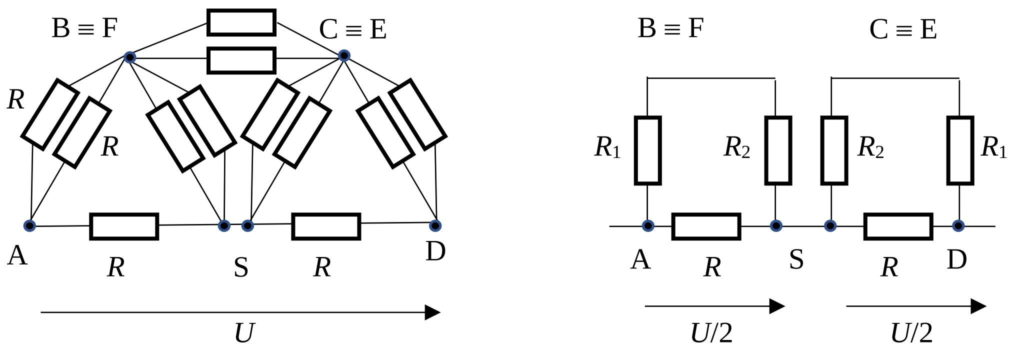
Pre dané hodnoty $p_3 \approx 77{,}4$ kPa. 3 b

5) Elektrická poduška

Riešenie:

a) Priečky siete majú rovnaký odpor $R = a\,r$.

Keďže je obvod symetrický vzhľadom na os AD, majú uzly B a F rovnaký potenciál a možno ich preto vodivo spojiť. Rovnako uzly C a E. Taktiež stredy priečok BC a EF majú rovnaký potenciál ako stred S, a tak môžeme tieto body vodivo spojiť. Obvod prekreslíme.



Obr. RC–3

Na obrázku vľavo sú naznačené odpory po spojení uzlov B F a C E. Hornú spojku s odporom $R/2$ rozdelíme na polovice s odpormi $R/4$ a tie pripojíme k stredu S. Tak dostaneme obvod vpravo, kde

$$R_1 = \frac{R}{2} \quad \text{a} \quad R_2 = \frac{(R/2)(R/4)}{(R/2)+(R/4)} = \frac{R}{6}\ .$$

Medzi uzlami AS je napätie $U/2$, takže výkon na tejto polovici AS obvodu je

$$P_{\mathrm{AS}} = \frac{(U/2)^2}{R} + \frac{(U/2)^2}{R_1 + R_2} = \frac{U^2}{4}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{(R/2)+(R/6)}\right) = \frac{5}{8}\frac{U^2}{R} = \frac{5}{8}\frac{U^2}{a\,r}\ .$$

Celkový výkon $P = 2\,P_{\mathrm{AS}} = \dfrac{5}{4}\dfrac{U^2}{a\,r}$. Pre dané hodnoty $P \approx 45{,}0$ W. 4 b

b) Napätie $U_{\mathrm{AS}} = U/2$ sa rozdelí medzi vetvy AF a FS priamoúmerne odporom R_1 a R_2

$$U_{\mathrm{AF}} = \frac{U}{2}\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{3}{8}U\ , \quad U_{\mathrm{FS}} = \frac{U}{2} - U_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{8}U\ , \quad U_{\mathrm{EF}} = U - 2\,U_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}U\ .$$

Výkony v jednotlivých vetvách sú

$$P_{\mathrm{AS}} = \frac{1}{R}\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \frac{U^2}{4a\,r}\ , \quad P_{\mathrm{AF}} = \frac{U_{\mathrm{AF}}^2}{R} = \frac{9}{64}\frac{U^2}{R} = \frac{9\,U^2}{64\,a\,r}\ ,$$

$$P_{\mathrm{FS}} = \frac{1}{R}\left(\frac{U}{8}\right)^2 = \frac{U^2}{64\,a\,r}\ , \quad P_{\mathrm{EF}} = \frac{U_{\mathrm{EF}}^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{4}U\right)^2 = \frac{U^2}{16\,a\,r}\ .$$

Môžeme sa presvedčiť o správnosti

$$P = 2P_{\mathrm{AS}} + 4P_{\mathrm{AF}} + 4P_{\mathrm{FS}} + 2P_{\mathrm{EF}} = 2\frac{U^2}{4a\,r} + 4\frac{9\,U^2}{64\,a\,r} + 4\frac{U^2}{64\,a\,r} + 2\frac{U^2}{16\,a\,r} = \frac{5}{4}\frac{U^2}{a\,r}\ .$$

Pre dané hodnoty $P_{\mathrm{AS}} \approx 9{,}0$ W, $P_{\mathrm{AF}} \approx 5{,}1$ W, $P_{\mathrm{FS}} \approx 0{,}56$ W, $P_{\mathrm{EF}} \approx 2{,}3$ W. 4 b

Z výsledkov je zrejmé, že výkon podušky je primeraný, pričom najviac hreje priamy vodič AD (18 W), a celkom dobre hrejú aj obvodové spojky. K uvoľňovaní tepla iba nepatrne prispievajú spojky z uzlov B, C, E a F so stredom S. Tieto spojky však sú dôležité pre udržanie tvaru siete.

2 b

6) Chladenie plechu

Riešenie:

Za dobu τ prejde daným miestom úsek pásu s dĺžkou $a = v\ \tau$ a hmotnosťou

$$m = \rho_o V = \rho_o a d h = \rho_o d h v \tau.$$

Odobrané teplo pri ochladení na výslednú teplotu

$$Q_{t1} = m c_o (t_1 - t_2) = \rho_o d h v \tau c_o (t_1 - t_2).$$

Voda sa zohreje na teplotu varu t_v a potom zmení skupenstvo na paru. Plechu odoberie príslušné teplo

$$Q_{t2} = m_v c_v (t_v - t_0) + m_v l_v = \rho_v V [c_v (t_v - t_0) + l_v].$$

Z rovnosti $Q_{t1} = Q_{t2}$ po dosadení dostávame objem vody, ktorý pretečie chladiacim zariadením za jednotku času

$$q = \frac{V}{\tau} = \frac{\rho_o d h v c_o (t_1 - t_2)}{\rho_v [c_v (t_v - t_0) + l_v]}.$$

8 b

Z tabuliek zistíme konštanty: hustota ocele $\rho_o = 7{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, hustota vody $\rho_v = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, hmotnostná tepelná kapacita ocele $c_o = 450\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ a vody $c_v = 4{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, hmotnostné skupenské teplo varu vody $l_v = 2{,}26\ \mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$, teplota varu vody pri normálnom tlaku $t_v = 100\ °\mathrm{C}$.

Po dosadení $Q = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 1{,}9\ \mathrm{l \cdot s^{-1}}$.

2 b

7) Vyšetrovanie kmitov fyzikálneho kyvadla – *experimentálna úloha*

Podľa úrovne spracovania 0 – 10 b

63. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (1 až 6), Ivo Čáp (7)
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021