63. ročník Fyzikálnej olympiády

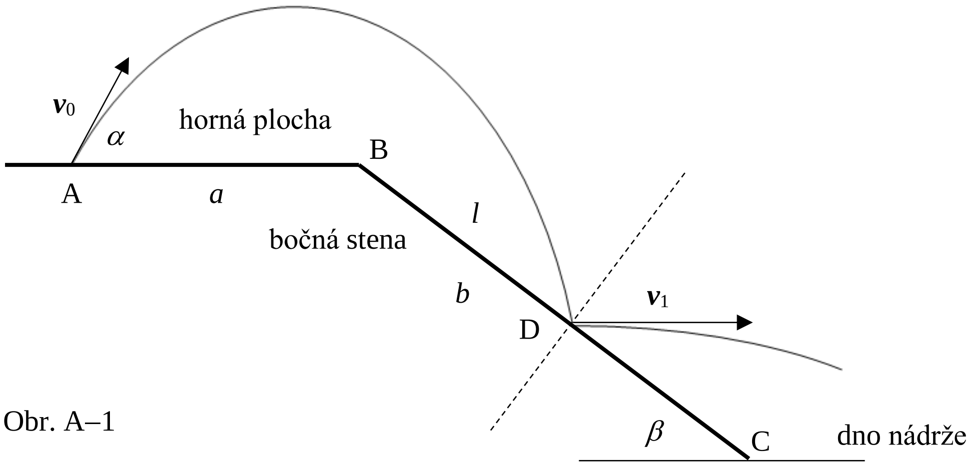
v školskom roku 2021/2022

Kategória A

Domáce kolo – text úloh

1) Šikmý vrh

Hladká bočná stena zatiaľ prázdnej vodnej nádrže má uhol sklonu $\beta = 35°$ a dĺžku spádovej úsečky b = 16,0 m. Na vodorovnom brehu vo vzdialenosti a = 10,0 m od hornej hrany steny stojí chlapec (bod A) a hádže loptičky v rovine kolmej na hranu steny rýchlosťou vrhu $v_0 = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, obr. A–1.



Obr. A–1

a) Určte rozsah uhlov vrhu α, pre ktoré loptička dopadne na hornú vodorovnú plochu.

b) Určte rozsah uhlov vrhu α, pre ktoré loptička dopadne na vodorovné dno nádrže. Do akej maximálnej vzdialenosti c od dolného okraja C bočnej steny môže loptička doletieť a aký musí byť v tomto prípade uhol α_1 vrhu? Úlohu riešte graficky.

c) Určte uhol vrhu α_2, pre ktorý sa loptička po dopade na bočnú stenu v bode D dokonale pružne odrazí vo vodorovnom smere. Určte dĺžku l úsečky BD, rýchlosť v_1 po odraze loptičky v bode D a vzdialenosť d_1 od bodu C, v ktorej loptička dopadne na dno nádrže.

Odpor vzduchu pri pohybe loptičky neuvažujte, bod A vrhu uvažujte na úrovni hornej plochy, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

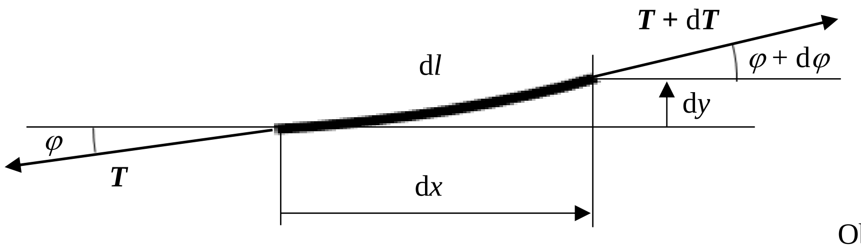
2) Balón na retiazke

Chlapci urobili zaujímavý experiment s nafukovacím balónikom v tvare gule naplneným héliom. Najprv ho za bezvetria vypustili nad vodorovnou plochou na veľmi tenkej niti a merali rýchlosť jeho stúpania. Už v malej výške stúpal zvislo nahor rovnomerným pohybom rýchlosťou u_1 = 1,5 m·s^{-1}.
Potom balónik stiahli nazad, pripevnili naň kovovú retiazku s dĺžkovou hmotnosťou μ = 50 g·m^{-1} a dĺžkou L = 2,5 m. Reťaz bola voľne položená na ploche, balónik uvoľnili, a začal stúpať. Stúpal, až horný koniec retiazky pripevnený k balóniku zastal vo výške h_1 = 50 cm.
Potom začal fúkať vietor rýchlosťou v vo vodorovnom smere a chlapci sa rozhodli experiment s balónikom s pripevnenou retiazkou opakovať. Stúpanie balónika retiazka znova zastavila, ale súčasne bol balónik unášaný v smere vetra, pričom retiazku ťahal za sebou. Faktor trenia medzi retiazkou a vodorovnou plochou f = 0,45. Odporová sila vzduchu pri pohybu balónika je priamoúmerná druhej mocnine rýchlosti balónika vzhľadom na okolitý vzduch.

a) Nakreslite obrázok balónika s retiazkou unášaného vetrom. V obrázku zakreslite vektory síl, ktoré pôsobia na balónik, a odlišnou formou (inou farbou alebo čiarkovane) sily pôsobiace na lanko. Pohyb sústavy balónik–retiazka stručne opíšte.

b) Určte maximálnu rýchlosť v_1 vetra, pri ktorej sa balónik nebude pohybovať.

Chlapci zmerali výšku h_2 horného konca retiazky, pripevnenej k pomaly unášanému balóniku. Doma sa rozhodli, že si výšku h_2 vypočítajú, a výsledok porovnajú s hodnotou získanou meraním. Tvar zavesenej retiazky je dosť zložitý, nepripomínala im žiadnu známu krivku, preto sa rozhodli ju skúmať po veľmi malých úsekoch. Na obr. A–2 je znázornený veľmi malý (elementárny) úsek retiazky dĺžky dl, na ktorý pôsobia z oboch strán ťahové sily v smere dotyčnice. Tvar retiazky je zakrivený, preto uhol φ medzi dotyčnicou a vodorovným smerom sa na úseku dl zmení o uhol dφ.



Obr. A–2

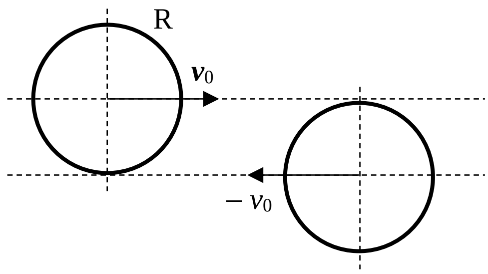
Napísali rovnice rovnováhy síl na elementárnom úseku retiazky vo vodorovnom i zvislom smere a z týchto rovníc vyjadrili pomer dT / dy zmeny veľkosti T ťahovej sily $\boldsymbol{T}$ pripadajúcej na rozdiel výšky dy koncov elementu retiazky. Využili pritom približné vzťahy pre malý uhol $\sin \mathrm{d}\varphi \approx \mathrm{d}\varphi$ a $\cos \mathrm{d}\varphi \approx 1$.

c) Určte použitím naznačeného postupu výšku h_2, v ktorej sa nachádzal horný koniec retiazky pripevnený k balóniku unášanému vetrom. Rýchlosť vetra je v_1.

d) Určte výšku h_3 pripevnenia retiazky a rýchlosť pohybu u_2 balónika pri rýchlosti vetra v_2 = 2,5 m·s^{-1}.

3) Zrážka krúžkov

Dva rovnaké tenké dokonale pružné krúžky s polomermi R sa šmýkajú oproti sebe po hladkom vodorovnom stole rovnako veľkými rýchlosťami s veľkosťou v_0. Vzdialenosť priamok, po ktorých sa pohybujú stredy krúžkov, je rovná polomeru R krúžkov (obr. A–3). Pôsobením trenia medzi povrchmi krúžkov sa krúžky po zrážke otáčajú okolo svojej osi kolmej na povrch stola uhlovou rýchlosťou ω.



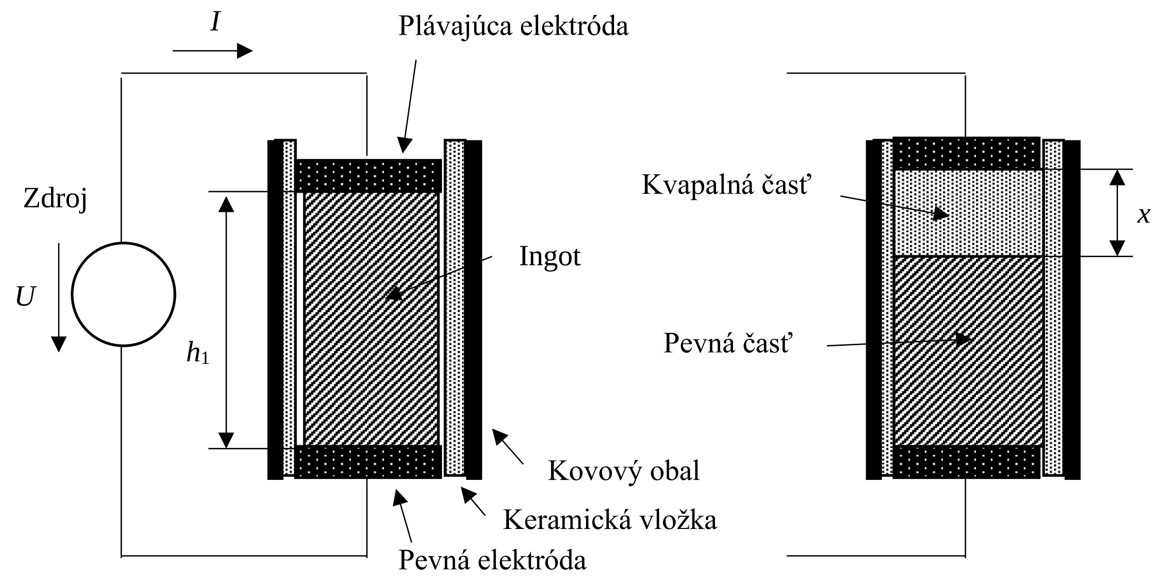
Obr. A–3

a) Určte veľkosť v vektorov rýchlosti krúžkov po zrážke vzhľadom na dosku stola.
b) Určte uhlovú rýchlosť ω, ktorú získajú krúžky pri zrážke, a smer ich otáčania.
c) Určte vzdialenosť d priamok, po ktorých sa pohybujú stredy krúžkov po zrážke.
d) Určte minimálnu hodnotu d_m, ktorú môže vzdialenosť d dosiahnuť, a minimálnu hodnotu f_m faktora trenia medzi povrchmi krúžkov, pre ktorú sa hodnota d_m dosiahne.
e) Určte pomer $p = Q / E_0$ tepla uvoľneného počas zrážky v dôsledku trenia a celkovej kinetickej energie krúžkov pred zrážkou. Určte maximálnu hodnotu p_m tohto pomeru.

Úlohu riešte všeobecne a potom číselne pre hodnoty v_0 = 50 cm/s, f = 0,10 a $R \approx$ 20 cm.
Trenie medzi krúžkami a stolom neuvažujte. Deformácia krúžkov počas zrážky je zanedbateľne malá oproti rozmerom krúžkov. Tiež trvanie Δt zrážky (deformácie) je veľmi krátka, za tento čas je posun stredov krúžkov nepatrný voči rozmerom krúžkov

4) Elektrická tavná pec

Pri zušľachťovaní (legovaní) kovov prímesami sa často používa tavenie kovov elektrickým prúdom. Uvažujme nasledujúci jednoduchý model elektrickej pece. Valcovú pec tvorí kovový obal s vysokou teplotou topenia, vo vnútri vyložený keramickou vrstvou s veľmi malou tepelnou vodivosťou. Na celom dne pece je plochá valcová elektróda z kovu s veľmi vysokou teplotou topenia. Horná rovnaká elektróda je v kontakte s horným povrchom taveného telesa (ingotu) a môže sa posúvať vo zvislom smere. Na začiatku sa do pece vloží horúce valcové kovové teleso s výškou h_1 = 2,5 m, priemerom d_1 = 120 cm a teplotou t_1 = 200 °C. Medzi stenou pece a povrchom vkladaného valca je medzera, obr. A– 4 (a), ktorá sa úplne vyplní pri zohrievaní telesa na teplotu topenia, obr. A– 4 (b).
Elektródy sú pripojené cez spínač na zdroj konštantného elektrického napätia, pričom medzi elektródami sa udržiava napätie U_0 = 3,0 V.
Po zapnutí spínača sa v kove uvoľňuje teplo, ktoré spôsobí zohriatie a topenie kovu. Pre jednoduchosť predpokladajte, že zohriatie ingotu je v celom objeme rovnomerné, a pri tavení sa roztavená vrstva kovu vytvára zhora nadol. V peci tak vzniká na vrchu valcová vrstva tekutého kovu. Predpokladajte ďalej, že rozhranie valca pevného a kvapalného kovu je rovinné a vodorovné.



(a) – t_1 (b) – t_2

Obr. A–4

Jedna z možností určenia stavu roztápania kovu spočíva v meraní času tavby.

a) Určte dobu τ_1, za ktorú kovové teleso dosiahne teplotu topenia t_2 = 660 °C, a dobu τ_2 (od okamihu dosiahnutia teploty t_2), za ktorú sa celé kovové teleso roztopí.

Druhá možnosť určenia stavu roztápania kovu spočíva v sledovaní zvislého pohybu hornej elektródy.

b) Odvoďte vzťah pre posunutie δ hornej elektródy zo začiatočnej polohy ako funkciu hrúbky x vrstvy tekutého kovu. Určte maximálne posunutie δ_m, ktoré zodpovedá roztopeniu celého ingotu.

Tretia možnosť sledovania stavu roztápania kovu spočíva v sledovaní výkonu zdroja elektrického napätia a celkovej dodanej elektrickej energie.

c) Odvoďte vzťah pre výkon P zdroja elektrického napätia ako funkciu x. Určte výkon P_1 zdroja v okamihu zopnutia spínača, výkon P_2 v okamihu dosiahnutia teploty topenia t_2 a výkon P_3 v okamihu roztopenia celého kovového telesa.

Pri riešení použite materiálové konštanty:
- pre pevné skupenstvo kovu: hustota ρ_0 = 2,70×10^3 kg·m^{-3} (pre t_0 = 0 °C), koeficient dĺžkovej teplotnej rozťažnosti α_L = 23,1×10^{-6} K^{-1}, hmotnostná tepelná kapacita c = 896 J·K^{-1}·kg^{-1}, hmotnostné skupenské teplo topenia l_t = 399 kJ·kg^{-1}, elektrická rezistivita ρ_{R0} = 28,2 nΩ·m (pre t_0 = 0 °C), koeficient teplotnej závislosti odporu α_R = 4,0×10^{-3} K^{-1}.
- pre kvapalné skupenstvo kovu s teplotou t_2 = 660 °C: hustota ρ_{2k} = 2,38×10^3 kg·m^{-3}, elektrická rezistivita ρ_{Rk} = 245 nΩ·m.

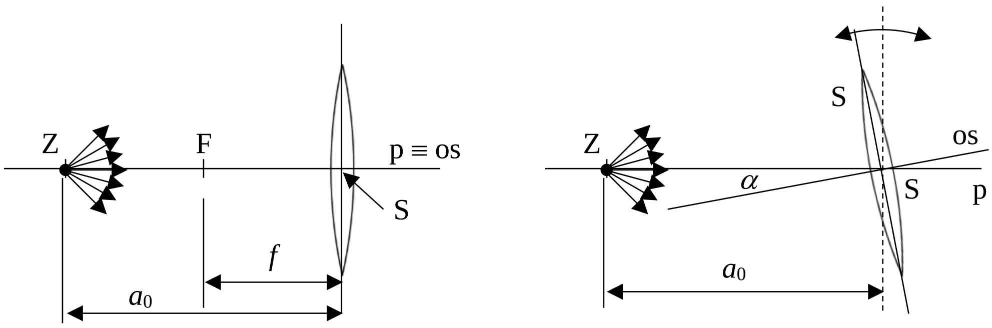
Predpokladajte, že obsah nádoby pece (kov a tavenina) je dokonale tepelne izolovaný od okolia a tepelná kapacita elektród i stien pece je veľmi malá v porovnaní s tepelnou kapacitou kovu v peci. Ďalej predpokladajte, že zohrievanie obsahu pece je pomalé, takže celý obsah pece má v danom okamihu rovnakú teplotu. Hodnoty c, α_L a α_R považujte za teplotne nezávislé konštanty. Odpor prívodných vodičov neuvažujte.

Pozn.: Uvažujte teplotné závislosti rozmerov, hustoty a rezistivity ingotu. Odôvodneným zjednodušením preveďte, v prípade potreby, integrované funkcie na lineárny tvar. Môže byť aj užitočný výsledok integrálu $\int_{t_1}^{t_2} \frac{1+at}{1+bt}\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{b^2}\ \ln\frac{1+bt_2}{1+bt_1} + \frac{a}{b}\left(t_2 - t_1\right)$*, kde a, b sú konštanty.*

5) Rotujúca šošovka

Priamka p splýva s optickou osou tenkej spojnej šošovky s ohniskovou vzdialenosťou f = 25 cm. Na priamke p sa nachádza bodový zdroj svetla Z, obr. A–5 (a), vo vzdialenosti a_0 = 40 cm od šošovky.

a) Prekreslite obrázok A–5 (a) a zostrojte v ňom obraz Z′ zdroja. Určte obrazovú vzdialenosť b_0 zdroja výpočtom a výsledok porovnajte s údajom z obrázku.



(a) Obr. A–5 (b)

Šošovku začneme nakláňať tak, že jej optická os zviera s priamkou p uhol α a stred šošovky zostáva na pôvodnom mieste vo vzdialenosti a_0 od zdroja Z, obr. A–5 (b).

b) Zostrojte obraz Z″ zdroja Z šošovkou naklonenou o uhol α = 15°, určte vzdialenosť x obrazu Z″ od obrazu Z′ a túto hodnotu overte výpočtom.

c) Šošovka sa začne periodicky vychyľovať podľa harmonickej závislosti $\alpha = \alpha_\mathrm{m} \sin \omega t$, kde α_m = 5° a ω = 6,28 rad·s^{-1}. Uveďte vzťahy pre časovú závislosť výchylky x a rýchlosti v pohybu obrazu Z″ okolo polohy obrazu Z′. Zostrojte grafy týchto časových závislostí.

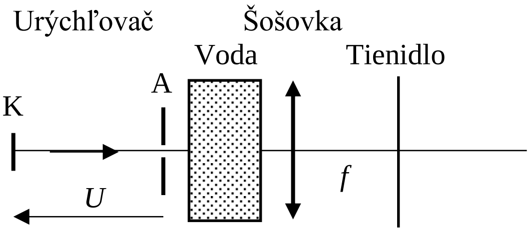
d) Určte minimálnu hodnotu x_1 a maximálnu hodnotu x_2 výchylky x. Určte maximálnu hodnotu v_1, minimálnu hodnotu v_2 rýchlosti v a uhly α_1 a α_2, pri ktorých rýchlosť v tieto hodnoty dosahuje.

Pozn.: Pre uhly α < 5° platia s dostatočnou presnosťou vzťahy $\sin\alpha \approx \alpha$ a $\cos\alpha \approx 1$.

6) Žiarenie Vavilova – Čerenkova

Ak sa častica s elektrickým nábojom pohybuje v priezračnom prostredí rýchlosťou väčšou, ako je rýchlosť svetla v tomto prostredí, dochádza k tzv. Vavilovmu–Čerenkovovmu javu. Priezračné prostredie vybudené elektricky nabitou časticou emituje svetelné žiarenie, a nakoľko častica sa pohybuje rýchlejšie ako svetlo v danom prostredí, vlnový front žiarenia nadobúda kužeľovitý tvar obdobne, ako keď teleso pohybujúce sa vo vzduchu rýchlejšie ako rýchlosť zvuku vytvára rázovú akustickú vlnu v podobe Machovho kužeľa.

Uvažujte široký zväzok relativistických elektrónov, ktorý sa šíri vo vrstve vody. Za vrstvou vody sa nachádza spojná šošovka a v jej ohniskovej rovine tienidlo, obr. A–6. Elektróny sú emitované z katódy K a urýchľujú sa medzi anódou A a katódou K elektrickým napätím U. Predpokladajte, že na výstupe urýchľovača sa všetky elektróny pohybujú rovnakou rýchlosťou a v rovnakom smere kolmo na povrch vrstvy vody.



Obr. A–6

a) Určte minimálne urýchľovacie napätie U_m, aby vo vrstve vody nastal Vavilovov–Čerenkovov jav, a zodpovedajúcu hybnosť p_m a energiu E_m elektrónov na výstupe urýchľovača. Energiu vyjadrite v jednotkách J a eV.

b) Dokážte, že ak majú všetky elektróny zväzku vo vode rovnakú energiu $E = k\,E_m$, kde $k > 1$, obrazec, ktorý vzniká na tienidle je kružnica. Určte polomer tejto kružnice.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $k = 2$, index lomu vody $n = 1{,}33$; hmotnosť elektrónu $m = 9{,}1\times10^{-31}$ kg, náboj elektrónu $e = -1{,}6\times10^{-19}$ C, rýchlosť svetla vo vákuu $c = 3{,}0\times10^{8}$ m·s^{-1}, ohnisková vzdialenosť šošovky $f = 15$ cm.

Pozn.: Hmotnosť elektrónu m sa s rýchlosťou nemení (niekedy sa preto nazýva invariantná, či pokojová). V populárnej literatúre sa ale často používa pojem „relativistická hmotnosť" pre označenie výrazu $m_r = m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ *, ktorá s rýchlosťou v elektrónu rastie.*

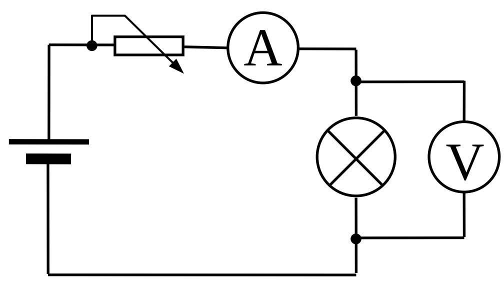
7) Žiarenie vlákna žiarovky – *experimentálna úloha*

Vlákno žiarovky sa približne správa ako čierne teleso, intenzita vyžarovania vlákna je určená Stefanovým-Boltzmannovým zákonom

$$H_e = \frac{\Phi_e}{S} = \sigma T^4$$

kde Φ_e je žiarivý tok, S je veľkosť žiariacej plochy, $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konštanta a T predstavuje termodynamickú teplotu žiariacej plochy.

Žiarivý tok žiarovky Φ_e je prakticky rovnaký ako jej elektrický príkon $P = U\,I$.



Obr. A–7

Predpokladajte, že závislosť odporu vlákna žiarovky od teploty je približne lineárna a môžete ju vyjadriť vzťahom $R = R_1 (1 + \alpha \Delta t)$,

kde R_1 je odpor pri vzťažnej teplote t_1, $\Delta t = t - t_1$ je zmena teploty a α je teplotný súčiniteľ odporu. Ak zvolíme vzťažnú teplotu medzi 15 °C a 25 °C, má wolframový drôt, z ktorého je vyrobené vlákno žiarovky, teplotný súčiniteľ odporu $\alpha = 4{,}4 \times 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$. V úlohe použite malú žiarovku s menovitými hodnotami napätia a prúdu $U_n = 24$ V, $I_n = 0{,}1$ A, ktorá sa bežne predáva v predajniach elektrotechnických súčiastok.

Úlohy:

a) V zapojení podľa schémy na obrázku A–7 odmerajte závislosť žiarovkou prechádzajúceho prúdu od napätia na žiarovke. Z výsledkov meraní určte, ako sa mení s narastajúcim napätím príkon žiarovky a odpor jej vlákna.
b) Zostrojte graf závislosti odporu žiarovky od napätia. Z grafu stanovte odpor vlákna pri nulovom napätí, pri ktorom je teplota vlákna rovnaká ako teplota okolia.
c) Určte, ako sa mení teplota vlákna žiarovky s narastajúcim napätím. Potrebný vzťah odvoďte. Za vzťažnú teplotu zvoľte teplotu laboratória.
d) Overte, že pri napätí väčšom ako 5 V, kedy sa takmer celá dodaná energia vyžiari, je pomer P / T^4 konštantný.
e) Stanovte plošný obsah časti povrchu dokonale čierneho telesa, ktoré by pri zistených teplotách žiarila rovnako ako daná žiarovka.

Výsledky meraní a výpočtov zapíšte do tabuľky:

U / V	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	5,0	10	15	20	25
I /mA											
R / Ω											
P / W											
T / K											
P / T^{-4}											

Poznámka:

Prvá časť merania (do 1 V) slúži predovšetkým na určenie odporu žiarovky R_1 pri teplote okolia; v druhej časti (od 5 V) overíme Stefanov-Boltzmannov zákon.

63. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie A*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (1 až 6), Ivo Čáp (7)
Recenzia: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021